Lánctörtek

Danka Tivadar* és Varga Tamás*

1. Bevezetés

Az

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

alakú kifejezéseket, ahol $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$ valós vagy komplex számok, lánctörteknek nevezzük. A lánctörtek a matematika számos területén felmerülnek [8]: számelmélet, hipergeometriai függvények, ortogonális polinomok, momentumok, Padé-közelítések, bizonyos polinomsorozatok zérushelyeinek vizsgálata vagy a digitális szűrők elmélete. Ebben a cikkben számelméleti oldalról adunk bevezető áttekintést, illetve néhány érdekes példán keresztül rávilágítunk gyakorlati alkalmazhatóságukra is.

Számelméleti alkalmazásokban leginkább olyan lánctörtekkel találkozunk, amelyekben $b_n = 1$ (minden n-re), az a_n-ek pedig nemnegatív egészek, a továbbiakban mi is ezt követjük.

1.1. Definíció. Legyen $a_0 \in [0, \infty)$ tetszőleges nemnegatív valós szám és legyen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0, \infty)$ pozitív valós számokból álló sorozat. Az

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

alakú kifejezést **véges lánctört**nek nevezzük.

Ha tekintünk egy $[a_0]$, $[a_0; a_1]$,...,$[a_0; a_1, \dots, a_n] \dots$ véges lánctörtekből álló sorozatot, akkor vizsgálhatjuk a határértékét. Ha ez létezik, akkor a

$$\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

határértéket **végtelen lánctört**nek nevezzük, és rá az

$$[a_0; a_1, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

jelölést használjuk. Az $a_1, a_2, \dots$ számokat a **lánctört jegyei**nek nevezzük. Ha a jegyek egészek és a_0 kivételével pozitívak is, akkor **egyszerű** lánctörtről beszélünk.

Könnyen igazolhatjuk az alábbi véges lánctörtekre vonatkozó szabályokat. Hangsúlyozzuk, hogy ezekben a_i tetszőleges nemnulla pozitív valós szám (az a_0 szám 0 is lehet)!

1.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2 \dots, a_n]} \tag{1.1}$$

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] = [a_0; a_1, \dots, [a_{n-1}; a_n]], \tag{1.2}$$

illetve általánosabban

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k; a_{k+1}, \dots, a_n]]. \tag{1.3}$$

*A szerzőket a dolgozat elkészítésében a European Research Council Advanced Grant No. 267055 támogatta.

2. Valós számok lánctört alakja

Ismert, hogy tízes számrendszerben minden x valós szám felírható

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 \dots, \qquad a_i, b_i \in \{0, 1, \dots\}$$

alakban, ahol az a_i számokat x számjegyeinek, a b_i számokat x tizedesjegyeinek nevezzük. Ez alatt azt értjük, hogy

$$\begin{aligned} x &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0 10^0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 10^{-i}. \end{aligned}$$

Ez a felírás nem minden szám esetén egyértelmű, például $1.000 \dots = 0.999 \dots$. Számrendszerünk alapjául nem szükséges a 10-es számot választanunk. Általában x alakja egy α ($\alpha \geq 2$) alapú számrendszerben

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha^{-i},$$

ahol a_i és b_i az α alapszámnál kisebb természetes számok. A leggyakrabban használt számrendszerek a $2, 8, 10, 16$ alapú számrendszerek.

Felmerül a kérdés, hogy fel tudunk-e írni minden valós számot egyszerű lánctört alakban úgy, hogy csak természetes számok szerepeljenek benne jegyként? Látni fogjuk, hogy ez mindig megtehető.

2.1. Racionális számok

Vizsgáljuk először a racionális számokat! Elő tudunk-e állítani tetszőleges racionális számot lánctört alakban úgy, hogy minden jegye egész szám legyen? Tekintsük például a $\frac{11}{4}$ számot. Célunk olyan $a_0, \dots, a_n$ nemnegatív egész számokat keresni, hogy $\frac{11}{4} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Figyeljük meg, hogy egy

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

véges lánctört esetén a fenti kéttagú összegben szereplő második tag mindig kisebb, mint 1. Ebből következik, hogy az a_0-lal jelölt első jegy nem lehet más, mint $\lfloor 11/4 \rfloor$ (azaz $11/4$ egészrésze), illetve a második tag nem lehet más, mint $\{11/4\}$ (azaz $11/4$ törtrésze). Így kapjuk, hogy

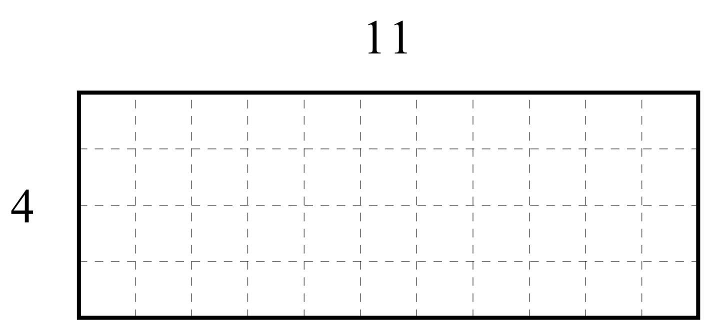
$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2 + \frac{1}{4/3}.$$

A kapott összeg második tagjának nevezőjére ugyanezt az eljárást alkalmazva kapjuk, hogy

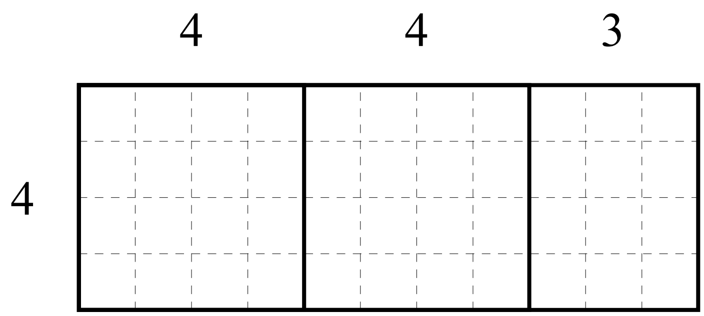
$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{4/3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}.$$

Ez az alak tovább nem bontható, ugyanis a végén kapott $3 = \frac{1}{1/3}$ már egész szám, törtrésze nulla.

Az előbbi eljárásunkat megfogalmazhatjuk geometriai nyelven is. Vegyünk egy 11 egység széles és 4 egység magas téglalapot.



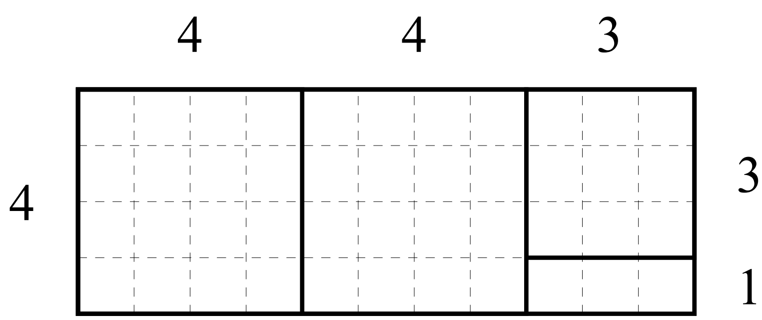
Ezt szeretnénk feldarabolni a lehető legnagyobb négyzetekre. Látható, hogy 4 egységnyinél hosszabb oldalú négyzet nem fér el benne és az is látható, hogy 4 egységnyi oldalhosszúságú négyzetből pontosan két darabot tudunk beleírni. Ezeket bal oldalról indulva elhelyezzük az eredeti téglalapunkban az alábbi módon.



Ez a felbontás az alábbi számolásnak felel meg:

$$\frac{11}{4} = \frac{4+4+3}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

Hogyan tudjuk az így kapott 4 egység magasságú, 3 egység szélességű téglalapot tovább darabolni, hogy ezúttal is a lehető legnagyobb négyzeteket kapjuk? Látható, hogy ebben az esetben egyetlen darab 3 egységnyi oldalhosszúságú négyzetet helyezhetünk el.



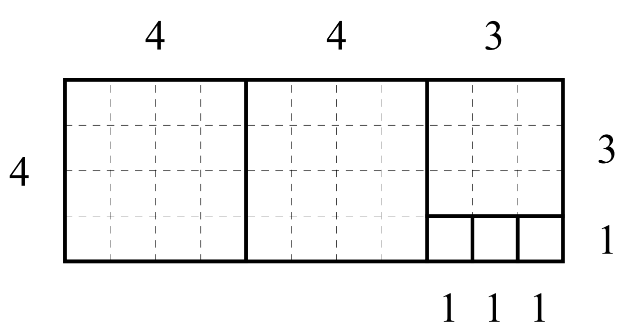
Számokkal leírva ez jelenti, hogy

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{3+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}},$$

tehát

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}.$$

Utolsó lépésben a kimaradó kis sávot felbontva látjuk, hogy ilyen módon darabolva a téglalapunkat csak egységnégyzetek maradnak.



A matematikában kicsit is jártas olvasó észreveszi, hogy előbbi eljárásunk lényegében az euklideszi algoritmus. Ha ugyanis azt a 11-re és a 4-re alkalmazzuk, akkor az alábbit kapjuk:

$$
\begin{aligned}
11 &= 2 \cdot 4 + 3,\\
4 &= 1 \cdot 3 + 1,\\
3 &= 3 \cdot 1 + 0,
\end{aligned}
$$

amiből kiolvashatjuk, hogy $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ és $a_2 = 3$.

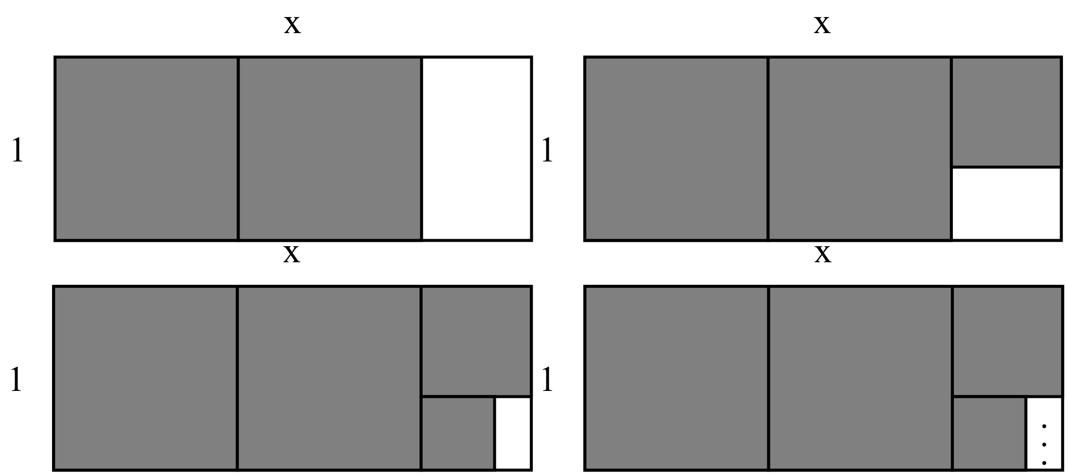
2.1. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $\frac{p}{q}$ racionális szám felírható véges egyszerű lánctört alakban! (Használjunk például q szerinti teljes indukciót!)*

A feladat következményeképp gondoljuk meg, hogy egy valós szám pontosan akkor írható fel véges egyszerű lánctörtként, ha racionális.

Ha egy racionális szám előáll $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ alakban, ahol $a_n > 1$, akkor $[a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$ alakban is felírható. Jegyek mentén történő teljes indukcióval azonban belátható, hogy a 0 és 1 kivételével bármely racionális szám egyértelműen áll elő olyan lánctört alakban, melynek utolsó jegye nagyobb, mint 1, azaz a lánctört-előállítás ebben az értelemben egyértelmű.

2.2. Irracionális számok

Legyen most x egy pozitív irracionális szám. Működik-e az előző módszer x esetén? Az első probléma az, hogy nem tudunk egy olyan egész oldalhosszúsággal rendelkező téglalapot adni, amelyre az oldalhosszak hányadosa x-szel egyenlő. Vegyük azonban észre, hogy az előző szakaszban leírt módszer nem függ az oldalak hosszától, csak az arányától! Legyen adott tehát egy x szélességű, 1 magasságú téglalap. Próbáljuk követni az előző módszert: rajzoljuk be a téglalapba a legnagyobb (tehát első lépésben $\min(x, 1)$-oldalú) négyzetet annyiszor, ahányszor átfedés nélkül lehetséges, majd a lefedetlenül maradt területre ismételjük az eljárást.



Ha például $1 \leq x$, akkor először megnézzük, hogy az 1 oldalú négyzet hányszor fér el a téglalapban; ez x egészrésze lesz, amit jelöljünk a_0-lal. Tehát első lépésben a_0-nyi területet fedtünk le, és x törtrészének megfelelő terület maradt ki, azaz

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}}.$$

Eljárásunkat a megmaradt 1 és $\{x\}$ oldalú téglalapra folytatva látjuk, hogy az $\{x\}$ oldalú négyzet $\left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor$-szer fér el ebben a téglalapban. Jelöljük ezt a_1-gyel. Így a téglalap területét a következő módon is megadhatjuk:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\{x\}} - a_1}}}.$$

Összegezve, ha

$$\xi_0 := x, \quad a_n := \lfloor \xi_n \rfloor, \quad \text{és} \quad \xi_{n+1} := \frac{1}{\xi_n - a_n}, \tag{2.1}$$

akkor n lépésben az

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}} \tag{2.2}$$

összefüggéshez jutunk. Gondoljuk meg, hogy ez a rekurzív eljárás a racionális számok esetén a már említett euklideszi algoritmust adja vissza, csak valamely n-re $\xi_n = 0$, és akkor megállunk.

Bevezetett jelölésünkkel ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \xi_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + 1/\xi_n]. \tag{2.3}$$

Irracionális x esetén azonban eljárásunk nem ér véget véges sok lépésben (ξ_n sosem egész), de nem is érhet, hiszen tudjuk, hogy pontosan akkor fejeződik be véges sok lépés után, ha x racionális.

A most kapott a_n jegyekből képezzük az $a_0, [a_0, a_1], \dots, [a_0, a_1, \dots, a_n], \dots$ véges lánctörtekből álló sorozatot ($a_0 \geq 0$, egyébként $a_n > 0$ egészek). Látjuk, hogy n-edik tagja majdnem ugyanaz, mint (2.2), ezért hihetőnek tűnik, hogy x-hez konvergál.

Mielőtt belátnánk ezt a konvergenciát, gyakorlásképpen nézzük meg algoritmusunk működését egy konkrét példán is. Az aranymetszés arányának, azaz az $(1+\sqrt{5})/2$ számnak lánctört jegyeit keressük. Most $\xi_0 = (1+\sqrt{5})/2$, így $a_0 = 1$, és

$$\xi_1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{így} \qquad a_1 = 1.$$

Láthatjuk, hogy visszakaptuk a kiindulási adatainkat ($\xi_1 = \xi_0$, ill. $a_1 = a_0$). Ezt az észrevételt iterálva teljes indukció mutatja, hogy bármely n-re $\xi_n = (1+\sqrt{5})/2$, így $a_n = 1$, tehát

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left[1; 1, 1, \dots, 1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}}}.$$

Térjünk vissza a konvergencia vizsgálatához! Egyelőre feledkezzünk meg az előző a_n-ekről, és $a_0, a_1, \dots$ jelöljön egy tetszőleges nemnegatív valós számokból (tehát nem feltétlen egészekből) álló véges vagy végtelen sorozatot, melynek pozitív indexű tagjai pozitívak. Tekintsük az alábbi **háromtagú rekurzió**kat:

$$\begin{aligned} p_{-2} &:= 0, \quad p_{-1} := 1, \quad p_n := a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ q_{-2} &:= 1, \quad q_{-1} := 0, \quad q_n := a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Teljesen indukcióval belátjuk, hogy $[a_0; a_1, \dots, a_n] = p_n/q_n$.

Valóban, $a_0 = p_0/q_0$. Most tegyük fel, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ (véges vagy végtelen) sorozat esetén $n-1$-ig igaz az összefüggés, megjegyezve, hogy véges sorozat esetén csak addig folytatjuk a rekurziót, amíg a sorozatnak van tagja. Ekkor felhasználva az (1.2) szabályt (ne feledjük, abban nincs megkövetelve, hogy az a_n számok egészek), kapjuk, hogy

$$[a_0, \dots, a_n] = \left[a_0, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] = \dots$$

Most alkalmazva az indukciós feltevést az $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1/a_n$ $n-1$ tagú véges sorozatra, így folytatjuk tovább:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(a_{n-1} + 1/a_n)p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + 1/a_n)q_{n-2} + q_{n-3}} \\ &= \frac{a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3} + (1/a_n)p_{n-2}}{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} + (1/a_n)q_{n-2}} = \frac{p_{n-1} + (1/a_n)p_{n-2}}{q_{n-1} + (1/a_n)q_{n-2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Az egyenlőség sorozat köztes tagjait elhagyva tehát azt kaptuk, hogy

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Abban az esetben, ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat tagjai még egészek is, világos, hogy p_n és q_n is az. A p_n/q_n hányadosokat az $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ lánctört **szeleteinek** nevezzük. Az előző két rekurzió tehát megadja az $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ lánctört szeleteinek számlálóját és nevezőjét (és, mint alább rámutatunk, relatív prímek formájában).

Jegyezzük még meg, ha a_n-t lecseréljük a (2.1)-ben definiált ξ_n számra, akkor előbbi gondolatmenetünket követve az is könnyen látható, hogy

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}}. \tag{2.5}$$

A $\lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ határérték létezésének igazolásához még szükségünk lesz néhány azonosságra, melyek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

2.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy a (2.4) rekurzióval definiált q_n sorozat pozitív, ha $n \geq 0$, továbbá pozitív indexű tagjai szigorúan monoton nőnek és $q_{n+2} \geq 2q_n$.*

A (2.4) rekurziók első két tagjára behelyettesítés mutatja, hogy $p_{-2}q_{-1} - q_{-2}p_{-1} = (-1)^{-1} = -1$. Ezután teljes indukciót követve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n &= p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - q_{n-1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) \\
&= a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-1} q_{n-2} - a_n p_{n-1} q_{n-1} - q_{n-1} p_{n-2} \\
&= -(p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n,
\end{aligned}$$

azaz

$$p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n. \tag{2.6}$$

Gondoljuk meg, ebből következik, hogy p_n-nek és q_n-nek nincs közös osztója, ezért $\frac{p_n}{q_n}$ tovább nem egyszerűsíthető!

Hasonló indukciós okoskodást kell alkalmaznunk az alábbi három feladatban is.

2.3. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$p_{n-2}q_n - q_{n-2}p_n = (-1)^{n-1}a_n$$

minden n esetén!

A szomszédos szeletek távolságát írja le az alábbi feladat.

2.4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_n q_{n-2}}$$

minden n esetén!

2.5. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \quad \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}$$

minden $k \geq 0$ esetén, valamint

$$\frac{p_{2l}}{q_{2l}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

minden $k \geq 0, l \geq 0$ esetén! Tehát a páratlan indexű szeletek monoton csökkennek, a páros indexű szeletek monoton nőnek, és bármely páros indexű szelet kisebb, mint egy páratlan indexű szelet.

2.6. Állítás. $\lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *létezik.*

Bizonyítás. Állításunk igazolásához csak annyit kell észrevennünk, hogy a 2.5., 2.4. és a 2.2. Feladat miatt a $\left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right]$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva és az átmérőjük 0-hoz tart.

■

Ezek után térjünk vissza x számunkhoz, és a hozzá konstruált a_n sorozathoz. Iménti eredményünk mutatja, hogy a_0, $[a_0, a_1]$,...,$[a_0; a_1, \dots, a_n]$,... konvergál. A következőkben belátjuk, hogy határértéke x. Emlékezzünk, hogy (2.3) és (2.5) szerint

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}] = \frac{\xi_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

Ebből kiindulva kis számolással nyerjük, hogy

$$x - [a_0; a_1, \dots, a_n] = x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n},$$

amiből (2.6) és a $\xi_{n+1} > 1$, ha x irracionális, egyenlőtlenség figyelmbevételével, majd a 2.2. Feladat felhasználásával adódik, hogy

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \le \frac{1}{q_n^2} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ezzel tehát bizonyítottuk az alábbi állítást.

2.7. Állítás. *Az eddigi jelölésekkel élve*

$$x = \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots],$$

és

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n^2} \tag{2.7}$$

teljesül minden x pozitív valós szám esetén.

2.8. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$q_n \ge 2^{\frac{n-1}{2}}$$

minden n természetes számra (vö. 2.2. Feladat)! Mit mondhatunk (2.7) tükrében a p_n/q_n sorozat konvergenciájának sebességéről?

Nézzük meg az eddigieket ismét az $(1 + \sqrt{5})/2$ példáján! Már láttuk, hogy $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 1$, ezért $(1 + \sqrt{5})/2$ lánctört alakja $[1; 1, 1, \dots]$, s így a (2.4) rekurzió az alábbi konkrét alakot ölti:

$$\begin{aligned} p_{-2} &:= 0, \quad p_{-1} := 1, \quad p_n := p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ q_{-2} &:= 1, \quad q_{-1} := 0, \quad q_n := q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

tehát $p_{-1} = 1$, $p_0 = 1$, $p_1 = p_{-1} + p_0$,..., $p_n = p_{n-2} + p_{n-1}$, ..., továbbá $q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = q_0 + q_1$, ..., $q_n = q_{n-2} + q_{n-1}$, ... Teljes indukcióval pedig könnyen látható, hogy $q_n = p_{n-1}$. Az olvasónak feltűnhet, hogy itt egy jól ismert sorozat, a **Fibonacci sorozat** bukkant föl. Jelöljük ezért q_n-t F_n-nel. Ekkor a Fibonacci sorozat szomszédos tagjainak hányadosára a 2.7. Állítás szerint azt kapjuk, hogy

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [\underbrace{1; 1, \dots, 1}_{n\,\text{db}}] \to \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

2.9. Feladat. *Az*

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2} - 1$$

azonosság segítségével igazoljuk, hogy

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots]!$$

2.3. A lánctört-reprezentáció előnyei és hátrányai

Láthattuk, hogy x lánctörtjegyeinek meghatározása során nem történik más, mint hogy egy 1 magasságú, x szélességű téglalapot feldarabolunk a lehető legkevesebb négyzetre és összeszámoljuk, hogy a különböző méretű négyzetekből hány fér bele. Mi történik akkor, amikor x-et tízes számrendszerben írjuk föl? Ekkor egy x területű téglalapot 10^k oldalú négyzetekre darabolunk föl. Ebben az esetben tehát építőkockáink méretét nem mi választjuk meg! Hogy melyik reprezentációt érdemes használni, az attól függ, hogy az adott számot milyen célra használjuk, ami különféle elvárásokban nyilvánulhat meg.

Egyik alapvető, elméleti szempontból különösen fontos követelmény, hogy az adott ábrázolásból a szám minél több tulajdonságát minél egyszerűbben olvashassuk ki. Ebből a szempontból kiemelkedő a lánctört-reprezentáció szerepe. Míg számrendszerbeli ábrázolások esetén az ábrázolás inkább a számrendszer alapjához való viszonyt tükrözi, addig a lánctört-ábrázolás sokkal tisztább formában világítja meg az adott szám tulajdonságait. Gondoljunk például arra, hogy egy szám racionális vagy irracionális volta a lánctört alak végessége alapján egyértelműen eldönthető, míg például tízes számrendszerben nem ilyen egyszerű a jellemzés.

Az elméleti követelmények mellett gyakorlatibbakat is megfogalmazhatunk. Egyik ilyen, hogy közelítő értékeket adhassunk meg a reprezentáns alapján. Mint alább látni fogjuk, ebből a szempontból is kitűnnek a lánctörtek, mivel bizonyos értelemben egy szám legjobb (racionális) közelítéseit olvashatjuk ki belőlük.

Van azonban egy olyan, elsősorban gyakorlati szempont is, aminek a lánctört alak nem felel meg. Ez pedig az aritmetikai műveletek elvégzése. Míg tízes számrendszerbeli alakokat egyszerű algoritmussal adhatunk például össze, addig lánctört alakok összeadására nem ismert gyakorlatban is jól alkalmazható szabály.

3. Mediánsok és mátrixok

Ebben a fejezetben az ún. mediánsokkal fogunk foglalkozni, melyek szintén nagyon hasznosak a lánctörtek vizsgálata során, és segítségükkel mélyebb összefüggéseket is feltárhatunk.

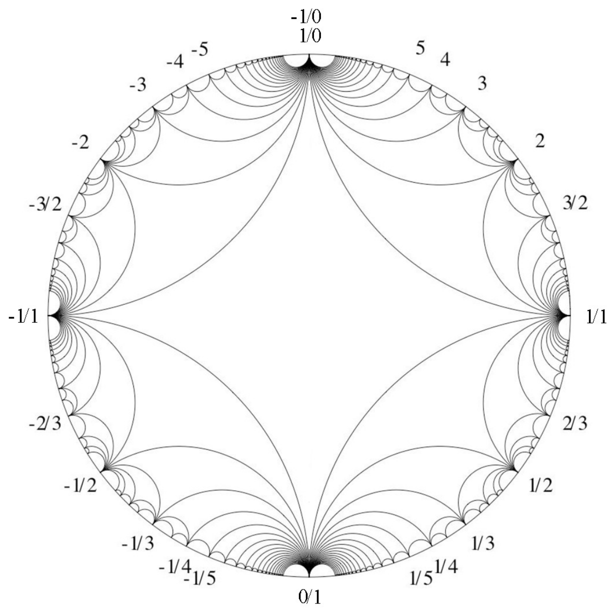
3.1. Definíció. Legyen $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ két tetszőleges racionális szám tovább nem egyszerűsíthető alakban megadva. Az $\frac{a+c}{b+d}$ hányadost ezek **mediáns**ának, a $\frac{ka+c}{kb+d}, k \in \{1,2,3,\dots\}$ hányadosokat pedig **köztes hányados**aiknak nevezzük.

3.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ mediánsa mindig a két szám között van!*

Az 1/0 hányadost formálisan írva, végtelenként értelmezve képezzünk mediánsokat a 0/1 hányadossal! Írjuk le az így kapott számokat egymás mellé, majd a következő lépésben szúrjuk be két elem közé a mediánsát! Az első néhány sorozat:

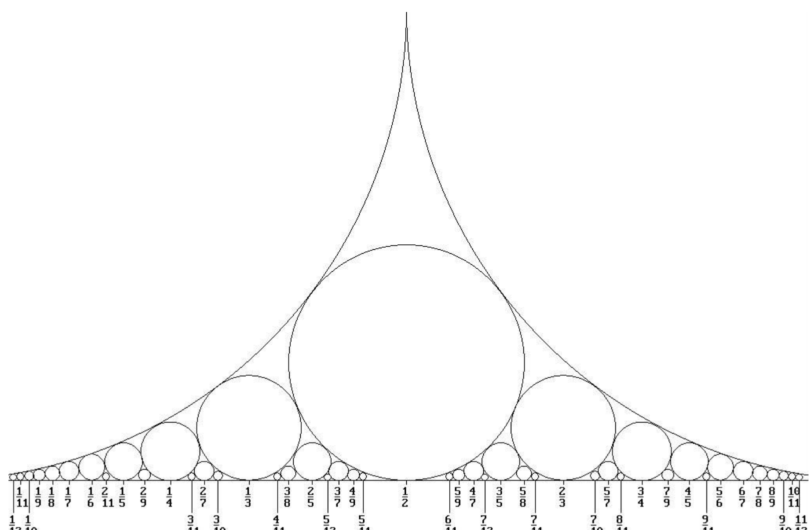
$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{0}$$
$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$$
$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0}$$
$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Az így kapott véges sorozatokat **Farey-sorozatok**nak nevezzük. Ha a hányadosokat egy körvonalra írjuk és a hányadosokat összekötjük a mediánsaikkal, az ún. **Farey-gráf**ot kapjuk. A gráfon a negatív racionális számokat is feltüntettük, amelyeket ugyanúgy mediánsképzéssel kapunk, csak 1/0 helyett $-1/0$-t, míg 1/1 helyett $-1/1$-et használunk kiinduláskor.



A Farey-gráf

Megemlítjük a Farey-sorozatok egy másik érdekes szemléltetését is. Rajzoljunk a $(0, 1/2)$ és az $(1, 1/2)$ pontok köré külön-külön egy $1/2$ sugarú kört! A két kör és az x tengely egy háromszögszerű tartományt fog meghatározni és a körök a $0/1$ és az $1/1$ pontokban érintik az x tengelyt. Írjunk most egy olyan nagy kört ebbe a tartományba, amekkorát csak tudunk! Ez a kör pontosan az $1/2$ pontban érinti tengelyünket. Így két háromszögszerű tartományt kapunk, amikre megismételhetjük eljárásunkat újra és újra. n lépés után a kapott körök pontosan az n-edik Farey-sorozat pontjaiban érintik a tengelyt. Ezeket a köröket **Ford-körök**nek hívjuk.



Ford-körök

Mi köze a Farey-sorozatoknak a lánctörtekhez? Hogy kiderítsük, tekintsünk tetszőleges $a_0, a_1, \ldots$ természetes számokat, és vizsgáljuk a belőlük képzett szeleteket! Láttuk már, hogy ha $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, ahol p_n, q_n közös osztó nélküli egész számok, akkor (2.4) szerint a

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & p_{-1} = 1, p_0 = a_0 \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & q_{-1} = 0, q_0 = 1 \end{cases}$$

rekurzió teljesül. Másképpen írva látjuk, hogy

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

amit megkaphatunk mediánsok ismételt képzésével: Könnyen látható ugyanis, ha a p_{n-2}/q_{n-2} és a p_{n-1}/q_{n-1} hányadosokból kiindulva mediánst képzünk, majd az eredménnyel és p_{n-1}/q_{n-1}-gyel újra és újra ismételjük ezt, a_n lépés után p_n/q_n-hez jutunk.

3.3. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\frac{p_n}{q_n}$ mindig $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ és $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ között van! (vö. 3.2. Feladat)*

Két tört mediánsát leírhatjuk mátrixok segítségével. Igaz ugyanis, hogy

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a+c \\ d & b+d \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan, ha már mediánsokat ki tudtunk fejezni mátrixokkal, a p_n/q_n szeletek is felírhatóak mátrixos alakban a

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_0 \\ q_{-1} & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

formula segítségével. Ezt alkalmazva a már említett F_n Fibonacci sorozatra azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

minden $n \geq 1$ esetén! Ez pedig lehetőséget ad arra, hogy zárt alakban adjuk meg a Fibonacci sorozat n-edik tagját. Ehhez nincs más dolgunk, mint a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot felírni PJP^{-1} alakban, ahol

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

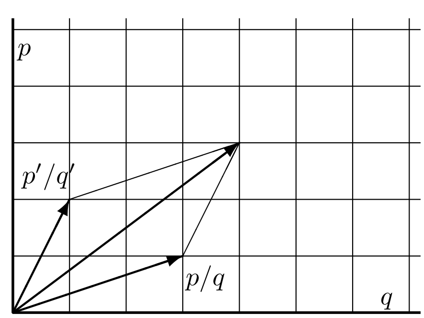
Ekkor ugyanis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a középső mátrixszorzást leolvashatjuk, hogy

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Megemlítjük a mediánsok még egy szemléltetését. Ehhez azt kell észrevennünk, ha a p/q racionális számnak a (q,p) rendezett párt feleltetjük meg, akkor a mediánsképzés egybeesik a vektorösszeadással. Mivel jelen kontextusban a racionális számokat tovább nem egyszerűsíthető alakjukban használjuk, a (q,p) vektor helyett gondolhatunk a ráilleszkedő egyenesre, aminek éppen p/q a meredeksége (ezért alkalmaztunk q,p és nem p,q sorrendet). Azonnal láthatjuk, hogy mediánshoz tartozó egyenes a reprezentáns egyenesek között van (vö. 3.2. Feladat).



4. A legjobb közelítés

4.1. A naptár- és az órakészítés problémája

Már az ősi kultúrák számára is fontos volt az időben periodikusan ismétlődő tevékenységek (pl. földművelés munkálatai) megszervezése. Ezért nagy szerep jutott a naptáraknak, amelyek alapján fel lehetett készülni a következő munkálatra (áradás, vetés, aratás). A naptárak rendszerint valamilyen csillagászati eseményhez (pl. a Föld Nap körüli, a Hold Föld körüli keringése) kötődően osztják fel az időt hosszabb-rövidebb időegységekre.

Alapvető időegység az év (pontosabban tropikus év), amely az az idő, ami alatt a Föld megkerüli a napot. [1]

Hogy egy éven belül eligazodhassunk, rövidebb időegységekre bontjuk fel azt. Az egyik ilyen rövidebb időegység a nap: az az (átlag) idő, ami a Nap két delelése között eltelik; alapja a Föld forgása. Már az első naptárkészítők szembesültek azzal a problémával, hogy az év által lefedett idő nem egész számú többszöröse a nap által lefedett időnek; így ha egy naptári évet n (pl. $n = 365$) napnak vettek, akkor azt kellett tapasztalniuk, hogy a vetés vagy a nyár leghosszabb napja a naptár bevezetésnek centenáriumi naptárévében már 25-tel nagyobb sorszámú napra esik, mint a naptár első évében. Ennek a problémának egyik elkerülési lehetősége, ha a naptári év hosszát nem rögzítjük, hanem pl. lesznek 365 és 366 napos naptári évek is.

A tropikus év hossza négy tizedesjegy pontossággal: 365,2422 nap (365 nap, 5 óra, 49 perc), így ha azt szeretnénk, hogy az évenként ismétlődő természeti jelenségek ugyanarra az egy-két naptári napra essenek minden évben, akkor ezt például úgy érhetjük el, hogy 365 és 366 napos évek megfelelő arányú használatával minél jobban közelítjük a $365,2422$ napos átlagértéket. Gyakorlati elvárás még az is, hogy lehetőleg egyszerű szabály szerint dönthessük el, mely naptári évek a 366 naposak.

Ennek megfelelő történelmi példa a Kr.e. 46-ban Julius Caesar által bevezetett julianusi naptár, amelyben minden negyedik naptári év 366 napos, azaz átlagban egy naptári év 365,25 napos, ami kicsit hosszabb a tropikus évnél, és 128 évenként egy nap késést eredményez. Ezt korrigálandó, több javaslat után 1582-ben került bevezetésre a Gergely-naptár, amely annyiban tért el a korábbi szabálytól, hogy a 100-zal osztható évek közül csak a 400-zal oszthatókat hagyta meg 366 naposnak, így ebben 400 évre 97 darab 366 napos naptári év esik. Ez 365,2425 nap hosszúságú átlagos naptári évet jelent. A nyugati társadalom mai napig ezt a naptárt használja.

Mint látjuk, rögzített napszámú évekkel a természet évszakai elcsúsznak a naptárban. Hogy ezt elkerüljük, bizonyos naptári éveket (szökőévek) egy nappal (szökőnap) kiegészítünk. Mindezt úgy szeretnénk, hogy a naptári évek átlaghossza minél pontosabban közelítse a 365,2422 értéket, de ugyanakkor egyszerű legyen az a szabály, amely alapján megadhatjuk a szökőéveket. Szabály alatt annak megadását értjük, hogy p évenként q szökőnap legyen, ahol p és q is egész. A szabály annál egyszerűbb, minél kisebb q. Feladatunk tehát az, hogy a $0,2422$ értéket minél kisebb nevezőjű racionális számmal, minél jobban közelítsük. Ekkor nyilván kompromisszumra kényszerülünk, de gyakorlati szempontból elég lehet egy megadott pontosság, pl. a Gergely-naptár csak $0,0003$ napot „téved” és a kérdéses nevező 400.

Hasonló problémát vet föl M. Camus a XIX. században [1]: Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy olyan tengely, amely 12 óra alatt tesz meg egy teljes fordulatot. Készítsünk egy olyan fogaskerék rendszert, mely utolsó tagjának tengelye 1 tropikus év alatt fordul meg. Ezeket percekre átváltva, a két tengely forgásidejének aránya 720/525949-nek adódik. Egyszerű megoldás lehetne, ha a 12 óra forgásidejű tengelyre felhelyezünk egy 720 fogú kereket, amit összekapcsolunk egy 525 949 fogúval. Ez utóbbi akkor pont egy év alatt tenne egy teljes fordulatot. Ezzel az a gyakorlati probléma, hogy túl nagy fogaskerekeket igényelne. Ezt elkerülhetjük, ha több fogaskereket kapcsolunk össze. Ha van egy 1 perc alatt körülforgó tengelyünk, és szeretnénk egy 1 óra alatt körülforgó tengelyt, azt pl. úgy tehetjük meg, hogy legyen a kiindulási tengelyen egy 10 fogú kerék. A második tengelyen legyen egy 60 fogú és egy 8 fogú kerék. Ezt a 60 fogú keréken keresztül kapcsoljuk a kiindulási tengely 10 fogú kerekéhez. Ezáltal a második tengely forgási ideje 6-szorosa az elsőjének, hiszen az első tengely fogaskereke 6-szor fordul körbe, mire a második tengely nagy fogaskerekének 60 fogán végighalad. Ha a második tengely 8 fogú kerekét egy harmadik tengelyen lévő 80 fogú kerékhez kapcsoljuk, akkor hasonló okoskodás mutatja, hogy a harmadik tengely forgási ideje 10-szerese a másodikénak és így $6 \cdot 10 = 60$-szorosa az elsőjének, tehát 60 perc alatt fordul meg, amit akartunk. Ebben az esetben a kiindulási forgásidő, és az elérendő forgásidő aránya $1/60$, amely felírható $10/60 \cdot 8/80$ alakban is, ami éppen az általunk is használt fogaskerék-összeállításnak felel meg. Megtudnánk-e ezt tenni a $720/525\,949$ esetében is, úgy hogy kerekeink fogainak száma ne legyen túl nagy (pl. legfeljebb 100)? Sajnos nem, mert akárhogy ügyeskedünk az egyik nevező legalább 525 949, hiszen ez egy prímszám. Hogy mégis valamilyen megoldást találjunk, lemondunk a teljes pontosságról és próbálunk egy olyan $720/525\,949$-hez közeli racionális számot keresni, amelynek mind számlálója, mind nevezője csak kis prímosztókkal rendelkezik.

4.2. A hangolás problémája

Ha valamilyen tárggyal hangot keltünk, akkor a keletkezett alaphang színét annak felharmonikusai (olyan hangok, melyek frekvenciája az alaphang egész számú többszörösei) határozzák meg. (Ez alapján ismerjük fel pl. a különböző hangszereket.) Legyen az alaphang frekvenciája ν; ekkor az alaphang és a 2ν frekvenciájú hang közötti hangköz

[1] Pontosabban az az idő, ami alatt a Nap áthalad kétszer az ún. tavaszponton, csillagászatban egyéb évfogalmak (sziderikus év, anomalisztikus év) is használatosak, amelyek hossza kissé eltér. Részletekért a [4] jegyzetre utalunk.

az oktáv, míg a 2ν és 3ν frekvencia közötti hangköz a tiszta kvint (a hangköz tehát az arányra vonatkozik, így az alaphang és a $3/2\ \nu$ frekvenciájú hang távolsága is tiszta kvint). A zenében ennél finomabb hangközökre is szükség van. Ezek kijelölésekor azonban problémák merülhetnek föl, amit az úgynevezett pitagoraszi hangsoron mutatunk be. A pitagoraszi hangsor megalkotásában két szabály, ill. azok inverzei használhatók:

(1) egy frekvencia megkétszerezése/felezése;

(2) egy frekvencia másfélszeresének/kétharmadának vétele.

Például az alaphangra kétszer alkalmazva a (2) szabályt, majd a kapott hang felét véve, az alaphang 9/8-ához jutunk, így lépve egy nagy egész hangnyit az alaphang frekvenciájáról. A nyugati zene az oktávot 12 közre bontja, és ezekből építkezik. Ezek félhangnyi távolságokra vannak egymástól, tehát 6 egész hangot lépve el kellene jutni a kiindulási frekvencia kétszereséhez. Csakhogy hat egész hangnyi lépés után a kiindulási frekvencia $(9/8)^6$-szorosához jutunk, és

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 = \frac{3^{12}}{2^{18}} \neq 2,$$

Ezt az ellentmondást **pitagoraszi kommá**nak nevezi a zeneelmélet. A két oldal közötti különbség ugyan egy félhang 1/5-nél kisebb, de jó füllel hallható, és halmozódva kilépünk a mű eredeti hangneméből. Az ellentmondás feloldására, enyhítésére több vagy más szabályokat alkalmazó hangolásokat (Helmholtz-féle, tiszta, kiegyenlített, középhangú temperálás) használnak, de minden esetben csak kompromisszumos megoldáshoz juthatunk, tökéletesen tiszta hangzás nem érhető el.

A pitagoraszi komma abból ered, hogy a számelmélet alaptétele miatt a

$$2^p = 3^q$$

egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazán. Előző egyenletünket kettes alapú logaritmust véve kissé alakítsuk át:

$$\frac{p}{q} = \log_2 3.$$

Meggondolásunk azt jelenti, hogy $\log_2 3$ irracionális, és hangskálánk kialakítása azon múlik, hogy ezt mennyire jól tudjuk racionális számmal közelíteni.

4.3. Matematikai megközelítés

Előző problémáink tehát arra vezettek, hogy egy számot kis nevezőjű racionális számmal minél jobban közelítsünk. Ezt az igényünket fejezi ki a következő definíció.

4.1. Definíció. Legyen x tetszőleges valós szám. A p/q tovább nem egyszerűsíthető racionális számot x egy **legjobb közelítés**ének nevezzük, ha bármely a/b racionális számra, melyre $q > b$,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{a}{b}\right|,$$

azaz p/q közelebb van x-hez, mint a/b.

Látni fogjuk, hogy egy szám legjobb közelítései csakis szeletei és a szeletekből kapott köztes hányadosai lehetnek! Ha egy számot tehát jól szeretnénk közelíteni, akkor érdemes szeleteinek vizsgálatával kezdeni.

4.2. Tétel. *[7, Theorem 15] Legyen x tetszőleges pozitív valós szám és legyen p/q az x szám egy 2-nél nagyobb nevezőjű legjobb közelítése. Ekkor p/q egybeesik x valamelyik szeletével vagy két egymás utáni szelet valamelyik köztes hányadosával, azaz létezik olyan $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ és $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, melyre*

$$\frac{p}{q} = \frac{kp_n + p_{n-1}}{kq_n + q_{n-1}}.$$

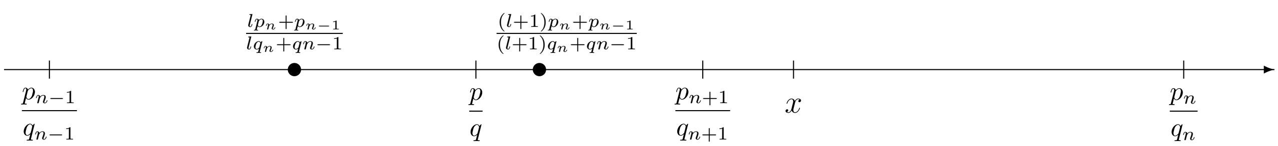
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. (Ezt megtehetjük, hiszen tudjuk, hogy minden szám felírható véges vagy végtelen lánctörtként.) Be fogjuk látni, hogy p/q csak x egyik szelete vagy egymás utáni szeletek valamelyik köztes hányadosa lehet. Indirekt módon bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy p/q *nem* szelete az x-nek és nem is áll elő két szomszédos szelet köztes hányadosaként.

A 3.2. Feladatban láttuk, hogy két racionális szám mediánsa a két szám között fekszik, és a 2.5. Feladatból az is következik, hogy az x szám p_{n-1}/q_{n-1} és p_n/q_n között van. Feltevésünk szerint p/q nem szelet (tehát nem esik egybe egyetlen p_n/q_n számmal sem), és legjobb közelítés, ezért létezik olyan n, hogy

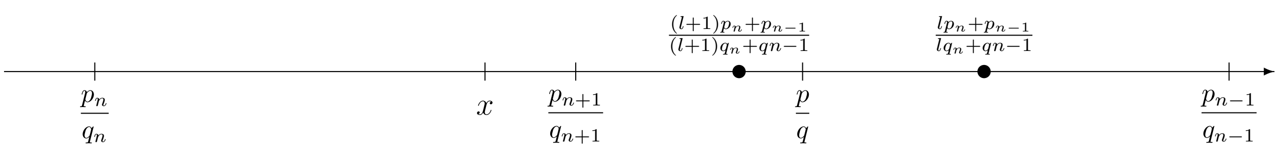
$$\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right|, \qquad \text{bármely } k \leq n \text{ -re.} \tag{4.1}$$

Rögzítsük ezt az n számot! Ekkor szükségképpen p/q az $(n-1)$-edik és az n-edik szelet között van, hiszen a két szelet x ellenkező oldalain fekszik, és p/q mindkettőnél közelebb van x-hez. A továbbiakban feltesszük, hogy $p_{n-1}/q_{n-1} < x < p_n/q_n$ (fordított irányú sorrend esetén a bizonyítás hasonló). Figyelembe véve, hogy p/q nem köztes hányados, és hogy $\frac{lp_n+p_{n-1}}{lq_n+q_{n-1}}$ l-ben szigorúan monoton, és p_n/q_n-hez tart, ha $l \to \infty$, létezik pontosan egy olyan l, amelyre

$$\frac{p}{q} \quad \text{szigorúan az} \quad \frac{lp_n + p_{n-1}}{lq_n + q_{n-1}} \quad \text{és az} \quad \frac{(l+1)p_n + p_{n-1}}{(l+1)q_n + q_{n-1}} \quad \text{hányadosok között fekszik.} \tag{4.2}$$



Az általunk feltett sorrend: $p_{n-1}/q_{n-1} < x < p_n/q_n$.



A „fordított" sorrend: $p_n/q_n < x < p_{n-1}/q_{n-1}$.

Ezért

$$\Big|\frac{p}{q} - \frac{lp_n + p_{n-1}}{lq_n + q_{n-1}}\Big| < \Big|\frac{(l+1)p_n + p_{n-1}}{(l+1)q_n + q_{n-1}} - \frac{lp_n + p_{n-1}}{lq_n + q_{n-1}}\Big|.$$

(2.6) segítségével kis számolás után belátható, hogy

$$\frac{1}{q(lq_n + q_{n-1})} < \Big|\frac{p}{q} - \frac{lp_n + p_{n-1}}{lq_n + q_{n-1}}\Big|$$

és

$$\Big|\frac{(l+1)p_n + p_{n-1}}{(l+1)q_n + q_{n-1}} - \frac{lp_n + p_{n-1}}{lq_n + q_{n-1}}\Big| = \frac{1}{((l+1)q_n + q_{n-1})(lq_n + q_{n-1})}.$$

Ezeket egymásba fűzve következik, hogy

$$\frac{1}{q(lq_n + q_{n-1})} < \frac{1}{((l+1)q_n + q_{n-1})(lq_n + q_{n-1})},$$

ami csak akkor lehetséges, ha $((l+1)q_n + q_{n-1}) < q$. Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{(l+1)p_n+p_{n-1}}{(l+1)q_n+q_{n-1}}$ és az $\frac{lp_n+p_{n-1}}{lq_n+q_{n-1}}$ hányadosok nevezői kisebbek, mint a p/q legjobb közelítés nevezője. Másrészt figyelembe véve, hogy p_{n+1}/q_{n+1}

közelebb van x-hez, mint p/q, az is igaz, hogy $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q$ (különben p/q nem lehetne legjobb közelítés), ezért $(l+1) < a_{n+1}$, és így (a köztes hányadosok most monoton nőnek l-ben!)

$$\frac{(l+1)p_n + p_{n-1}}{(l+1)q_n + q_{n-1}} < \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

A 2.5. Feladat szerint p_{n+1}/q_{n+1} és p_n/q_n az x szám ellenkező oldalán fekszik. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy $p_{n+1}/q_{n+1} < x$. Ez pedig az imént megmutatott egyenlőtlenség szerint maga után vonja, hogy az $(l+1)$-edik köztes hányados x-nél kisebb, ami pedig (4.2) szerint implikálja, hogy

$$\frac{p}{q} < \frac{(l+1)p_n + p_{n-1}}{(l+1)q_n + q_{n-1}} < x.$$

Ez azt mutatja, hogy az $(l+1)$-edik köztes hányados p/q és x között, és így p/q-nál x-hez közelebb fekszik, ami q-nál kisebb nevezője lévén ellentmond annak, hogy p/q legjobb közelítés.

Tehát p/q csak szelet vagy köztes hányados lehet.

■

Itt nem térünk ki a bizonyításra, de belátható az alábbi tétel.

4.3. Tétel ([10, 7.13. tétel])**.** *A p_1/q_1 szelettől kezdve minden szelet legjobb közelítés.*

E rész eredményeit figyelembe véve mind a naptár- és órakészítés során, mind a hangskála tagjainak kijelölésekor célravezető, ha legjobb közelítéseket keresünk, és ehhez első lépésben nincs más dolgunk, mint szeleteket keresni, amit, mint láttuk, algoritmikusan is megtehetünk (lásd (2.1)).

A naptárkészítés esetében a $0,2422$ számot közelítjük, ami tört alakban $\frac{1211}{5000}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
1211 &= 0 \cdot 5000 + 1211, &&\text{tehát} && a_0 = 0,\\
5000 &= 4 \cdot 1211 + 156, &&\text{tehát} && a_1 = 4,\\
1211 &= 7 \cdot 156 + 119, &&\text{tehát} && a_2 = 7,\\
156 &= 1 \cdot 119 + 37, &&\text{tehát} && a_3 = 1,\\
119 &= 3 \cdot 37 + 8, &&\text{tehát} && a_4 = 3,
\end{aligned}$$

és így

$$\frac{1211}{5000} = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{156}{1211}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{119}{156}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{37}{119}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{8}{37}}}}},$$

amiből az első öt (nulladiktól a negyedikig) szelet: 0, 1/4, 7/29, 8/33, 27/152. Megemlítjük, hogy az első szelet a julianusi naptárnak felel meg (tehát minden negyedik év szökőév). Figyeljük meg a harmadik szeletet (minden 33 évben 8 szökőév). Ez kb. 4460 év alatt téved 1 napot, míg a most használatos Gergely-naptár (minden 400 évben 97 szökőév) kb. 3333 évente téved 1 napot. Megjegyezzük, hogy az arab matematikus Omar Khajjam (1048-1131) javasolt egy a 33 év alatt 8 szökőévet alkalmazó naptárt [11].

Camus problémája esetén a szeletek mellett már a szomszédos szeletek köztes hányadosainak vizsgálatára is szükség lesz. Ezek között olyat keresünk, melynek számlálója és nevezője is kis prímosztókkal rendelkezik. Ha (pl. az euklideszi algoritmussal megkeresett) szeleteket szemügyre vesszük, sajnos nem túl kedvezőek az általunk támasztott igény (kis prímosztó) szempontjából. Ezért a köztes hányadosokat is megvizsgáljuk. Ekkor 31/22 645 és 33/24 106 szeletek köztes hányadosai között találjuk a 196/143 175 számot, amit számunkra kedvező tényezők szorzatára bonthatunk, például:

$$\frac{196}{143\,175} = \frac{10}{25} \cdot \frac{10}{75} \cdot \frac{7}{23} \cdot \frac{7}{83}.$$

Ez egy 5 tagból álló fogaskerékrendszert határoz meg, melynek középső három tengelyén kettő-kettő, a két szélsőn pedig egy-egy fogaskerék található: az első tengelyen egy 10 fogú kerék van, ami a második tengely 25 fogú kerekéhez kapcsolódik, a második tengely 10 fogú kereke a harmadik tengely 75 fogú kerekéhez, a harmadik tengely 7 fogú kereke a negyedik 23 fogú kerekéhez, végül a negyedik tengely 7 fogú kereke az ötödik egyetlen 83 fogú kerekéhez kapcsolódik. Ennek eredményeként az ötödik tengely szögsebessége az első tengely szögsebességének 196/143 175 része, így ha az első tengely fél naponként fordul meg, akkor az ötödik 4/196 perc híján egy tropikus év alatt tesz meg egy teljes fordulatot. (Ez a hiba abból származik, hogy 196/143 175 csak közelítése 720/525 949-nek.)

Az oktáv felosztásában, mint láttuk egy irracionális számot, a $\log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$-at kell közelítenünk, aminek első szeletei: 1, 2, 3/2, 8/5, 19/12, 65/41. Ezek szerint

$$3 = 2^{\log_2 3} \approx 2^{19/12},$$

vagy, ami ezzel ekvivalens,

$$\frac{3}{2} \approx 2^{7/12}.$$

Ez azt mutatja, hogy ha az oktávot 12 egyenlő részre osztjuk (tehát amiben a szomszédos hangok aránya $2^{1/12}$, ez az ún. kiegyenlített hangolás), akkor a tiszta kvinthez 7 félhangnyi lépés után érünk a legközelebb ebben a rendszerben; ekkor ugyan nem lesz meg a tökéletes 3/2-es arány, de a tiszta kvinttől csak a félhang kb. 2%-val térünk el, és 12 lépést követően pontosan oktávot ugrunk. A nyugati zene tehát az egyik legjobb közelítésnek megfelelő 12 fokú skálát használja. Érdekesség az is, hogy a tradicionális kínai zenében vagy a nyugati világ népzenéjében ötfokú skála figyelhető meg, ami a harmadik szeletnek (8/5) felel meg.

5. A Pell-egyenlet

Állítólag Arkhimédész nevéhez fűződik a következő Eratoszthenésznek ajánlott feladat, a ,,problema bovinum" (kb. szarvasmarha probléma), ami Vekerdi László fordításában így hangzik [6]:

Hány marhát számlált a Napisten nyája, barátom
Gonddal számold ki, hogyha vág az eszed
Hányat őriztek Szicília tág legelőin,
Négy kisebb részre bontva az isteni nyájt.
Mindegyik rész más színű volt. Hószín a legelső,
Egy másik résznek színe sötét fekete.
Barna a harmadik, a negyedik meg tarka-iromba.
Mindben több a bika és kevesebb a tehén.
Többen voltak a barna bikák ott, mint a fehérek,
Mégpedig a feketék harmadával s felivel.
Tarkák számának negyedével és ötödével
Múlta felül feketék száma a barnákét.
Tarkák is túltettek a barnákon a fehérek
Egyhatodával s még egyhetedével rá.
így a bikák. Hát a tehenek? Közülük a fehérek
A fekete marhák harmadát s negyedét
Alkották. Fekete tehenek meg a tarka
Marhák egynegyedét, s rá még egyötödét.
Tarka-iromba tehén volt egyötöd- és hatodannyi
Ebben a csordában, mint a barna barom.
Végül barna tehén hatodannyi s még hetedannyi,
Volt mint tiszta fehér marha (tehén s bika is).
Hogyha kiszámítod színenként hány bika volt ott
És tehenekből hány - számok mestere vagy.

Bölcsnek azonban nem mondhatnak, míg figyelembe
Nem veszed azt is, amit még hozzáteszek ím:

Bontsd a bikák nyáját két részre: fehér s feketékre
Egy részben, másba barna s tarka kerül.

Akkor az első rész sorakozhat négyzetalakban
    S háromszögletű szép rendben a többi bika.
Hogyha a problémát úgy oldod meg, hogy ez is vág
    Győzelmed teljes, s híres lesz a neved.

A részletes megoldást itt nem közöljük, az érdeklődő olvasó megtalálja pl. [6]-ban. A szöveg első része alapján egy lineáris diofantoszi egyenletrendszert kapunk. Az utolsó rész (Bontsd a bikák ...) további megszorításokat jelent, és a diofantoszi egyenletrendszerből nyert eredmények alapján végül az alábbi, nemlineáris diofantoszi egyenlethez jutunk:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

ahol $d = 410\,286\,423\,278\,424$. és x, y pozitív egész számok.

Kapott egyenletünk az ún. Pell-egyenletek egy speciális esete (a jobb oldal 1), ún. Fermat-egyenlet.

5.1. Definíció. Ha d és N egész számok, akkor az $x^2 - dy^2 = N$ egyenletet **Pell-egyenlet**nek nevezzük.

A megoldásokat a pozitív egész számok halmazán keressük.

Ha d negatív szám vagy teljes négyzet ($d = a^2$; és így az egyenlet bal oldala $(x - ay)(y + ay)$ alakot ölt), akkor könnyen látható, hogy csak véges sok megoldás van. Az az érdekes eset, amikor d pozitív és nem teljes négyzet. Ekkor a megoldások megtalálásában nagy segítségünkre vannak $\sqrt{d}$ szeletei, ugyanis igaz a következő tétel.

5.2. Tétel ([10, 7.24. tétel])**.** *Legyen d pozitív egész, de nem teljes négyzet, és jelölje $\sqrt{d}$ szeleteit rendre p_n/q_n. Ha $|N| < \sqrt{d}$, és (s, t) olyan megoldáspárja az $x^2 - dy^2 = N$ Pell-egyenletnek, melynek tagjai relatív prímek, akkor van olyan n pozitív egész, hogy $s = p_n$, $t = q_n$.*

A $\sqrt{d}$ mennyiség, ha d nem teljes négyzet, akkor ún. **kvadratikus irracionális** szám. A kvadratikus számok olyan számok, amelyek előállnak egy másodfokú egyenlet megoldásaként.

5.3. Feladat. *Legyen ξ egy irracionális szám. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor kvadratikus, ha léteznek olyan a, b, c egész számok ($b > 0$ nem négyzet szám, $c \neq 0$), hogy $\xi = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$.*

A kvadratikus számok jellemezhetők lánctörteik segítségével is. Nevezzük az $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ végtelen lánctörtet **periodikus**nak, ha van olyan r pozitív egész, hogy $a_{n+r} = a_n$ valahonnét kezdve minden n-re. Ezt úgy jelöljük, hogy az ismétlődő lánctörtjegy szakasz fölé egy vonalat írunk, tehát

$$[b_0; b_1, \ldots, b_m, a_0, \ldots, a_{r-1}, a_0, \ldots, a_{r-1}, \ldots] = [b_0; b_1, \ldots, b_m, \overline{a_0, \ldots, a_{r-1}}].$$

Belátható, hogy egy irracionális szám akkor és csak akkor kvadratikus, ha lánctört-kifejtésének alakja periodikus [10, 7.19. tétel]. Azt a legkisebb r-t, amelyre $a_{n+r} = a_n$ valahonnét kezdve minden n-re, a lánctört **periódus**ának nevezzük.

Ha a kvadratikus irracionális számunk $\sqrt{b}$ alakú (tehát $a = 0$, $c = 1$ az 5.3. Feladatban), akkor igazolható, hogy $\sqrt{b} = [a_0\overline{a_1, \ldots, a_{r-1}, 2a_0}]$ valamilyen r periódussal. (Ez akkor is igaz, ha $a_0 = 0$.) A most megemlített fogalmak segítségével előző tételünknél többet is mondhatunk, ha $N = \pm 1$.

5.4. Tétel ([10, 7.25. tétel])**.** *Legyen d olyan pozitív egész, amely nem négyzetszám. Jelölje r a $\sqrt{d}$ szám lánctört alakjának periódusát, p_n/q_n pedig a szeleteit. Ekkor az $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell-egyenletek pozitív megoldásairól a következőt mondhatjuk.*

Ha r páros, akkor az $x^2 - dy^2 = -1$ egyenletnek nincs megoldása, míg az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet pozitív megoldásait az $x = p_{nr-1}$, $y = q_{nr-1}$ számpárok adják.

Ha r páratlan, akkor az $x = p_{nr-1}$, $y = q_{nr-1}$ számok páratlan n-ekre megadják az $x^2 - dy^2 = -1$ egyenlet, páros n-ekre pedig az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet összes pozitív megoldását.

Befejezésként megemlítjük, hogy az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet pozitív megoldásait egy érdekes módon is előállíthatjuk [10, 7.26. tétel]. Az előzőek szerint a $(p_0, q_0), (p_1, q_1), \ldots$ sorozat tartalmazza az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet összes pozitív megoldását. Tudjuk, hogy mind p_n, mind q_n szigorúan monoton növő, ha $n \geq 1$. Ha (x_1, y_1) jelöli a legkisebb pozitív megoldásokból álló párt, akkor a többi pozitív megoldást az $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ összefüggés adja meg (elvégezzük a hatványozást, majd a $\sqrt{d}$-t tartalmazó, ill. nem tartalmazó tagokat csoportosítjuk). 1-től különböző N-ekre sajnos nem ismert ilyen átfogó összefüggés.

Hivatkozások

[1] D. Austin, Trees, Teeth, and Time: The mathematics of clock making, *http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-stern-brocot*

[2] E. Dunne, M. McConnel, Pianos and Continued Fractions, *Mathematics Magazine*, **72(2)** (1999), 104-115.

[3] F. Eisenbrand, Pope Gregory, the calendar, and continued fractions, *Documenta Mathematica, Extra volume: Optimization Stories* (2012), 87-93.

[4] Gábris Gy., Marik M., Szabó J., *Csillagászati földrajz*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2001.

[5] A. Hatcher, *Topology of numbers*, http://www.math.cornell.edu/ hatcher/TN/TNpage.html

[6] H. Dörrie, *A diadalmas matematika*, Gondolat Kiadó, 1965.

[7] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, The University of Chicago Press, 1964.

[8] L. Lorentzen, H. Waadeland, *Continued fractions with applications*, North-Holland, Amszterdam, 1992.

[9] Megyesi L., *Bevezetés a számelméletbe*, Polygon, Szeged, 2005.

[10] I. Niven, H. S. Zuckerman, *Bevezetés a számelméletbe*, Műszaki kiadó, Budapest, 1978.

[11] V. F. Rickey, Mathematics of the Gregorian calendar. *The Mathematical Intelligencer*, **7(1)** (1985), 53-56.

Danka Tivadar
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
6720, Szeged
Aradi vértanúk tere 1.

tdanka@math.u-szeged.hu

Varga Tamás
MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
6720, Szeged
Aradi vértanúk tere 1.

vargata@math.u-szeged.hu