

Szárítás során kialakuló hővezetés számítása Excel VBA makróval

Rajkó Róbert¹ – Eszes Ferenc² – Szabó Gábor¹

¹Szegedi Tudományegyetem, Szegedi Élelmiszeripari Főiskolai Kar
Élelmiszeripari Műveletek és Környezettechnika Tanszék

²Szegedi Tudományegyetem, Szegedi Élelmiszeripari Főiskolai Kar
Élelmiszertechnológia és Környezetgazdálkodási Tanszék

web: www.kemometria.hu/Rajko

e-mail: rajko@szef.u-szeged.hu

Összefoglalás

Szárítás során kialakuló hővezetés számolására alkalmas programot fejlesztettünk Fourier 2. törvényét megfogalmazó differenciálegyenlet megoldásaként.

Alaposan tanulmányoztuk a végtelen soros megoldások összefüggéseit algoritmus fejlesztés szempontjából. Tanulmányunkban a felmerült számítástechnikai problémákat és azok elkerülését célzó megoldásokat ismertetjük, valamint bemutatjuk az elkészült programot, amely Excel VBA makrónyelven készült.

Bevezetés

Szárítás során kialakuló hővezetés számolására alkalmas programot fejlesztettünk Fourier 2. törvényét megfogalmazó differenciálegyenlet megoldásaként:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \nabla^2 t. \quad (1)$$

Véges belső és külső hőellenállást tételeztünk fel, azaz mind a test hővezetési együtthatója (λ), mind a felületi konvektív hőátadási tényező (α) értéke véges. Peremfeltételként a következő egyenlettel leírható egyenlőséget választottuk:

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_f = \pm \alpha (t_k - t_f), \quad (2)$$

azaz a felületen hővezetéssel a testből kilépő (belépő) hőáramsűrűség megegyezik a határretegben tapasztalt hőáramsűrűséggel. A legegyszerűbb megoldás érdekében a közeghőmérsékletet (t_k) állandónak vettük.

A három egyetlen mérettel jellemezhető testre (végtelen síklap, végtelen henger és tömör gömb) vonatkozó végtelen soros megoldások (VSM) egyenleteit az irodalomból vettük (WONG 1983). Végtelen síklap esetén:

$$Y = \frac{t-t_k}{t_0-t_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\beta_i)}{2\beta_i + \sin(2\beta_i)} e^{-\beta_i^2 Fo} \cos\left(\beta_i \frac{l}{l_0}\right) \quad (3)$$

$$\beta_i \cdot \operatorname{tg}(\beta_i) = Bi \quad (4)$$

Végtelen henger esetén:

$$Y = \frac{t-t_k}{t_0-t_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} e^{-\beta_i^2 Fo} J_0\left(\beta_i \frac{l}{l_0}\right) \quad (5)$$

$$\beta_i = Bi \frac{J_0(\beta_i)}{J_1(\beta_i)} \quad (6)$$

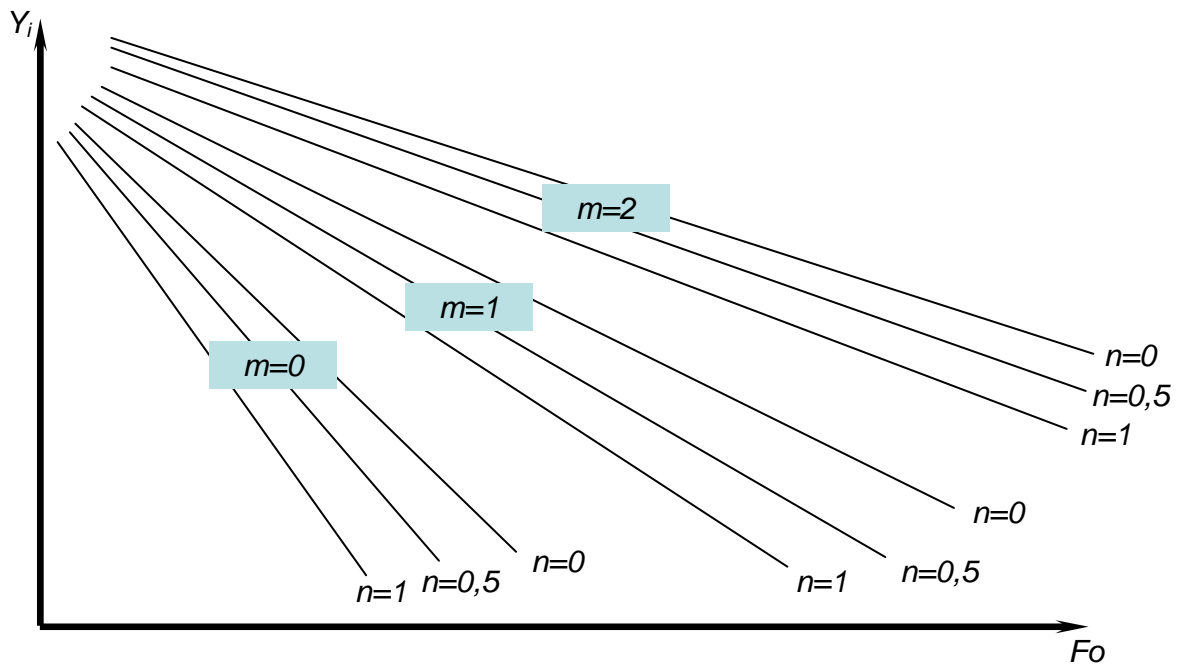
Tömör gömb esetén:

$$Y = \frac{t-t_k}{t_0-t_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4[\sin(\beta_i) - \beta_i \cos(\beta_i)]}{2\beta_i - \sin(2\beta_i)} e^{-\beta_i^2 Fo} \frac{\sin\left(\beta_i \frac{l}{l_0}\right)}{\beta_i \frac{l}{l_0}} \quad (7)$$

$$\beta_i \cdot \cot(\beta_i) = 1 - Bi \quad (8)$$

Az alkalmazások során e három analitikus megoldás szuperpozícióját alkalmazzuk. Ez akkor megengedett, ha a peremfeltételek és a folyamatot leíró differenciálegyenlet a hőmérséklet szempontjából lineárisak, valamint a termikus anyagállandók (λ , ρ , c_p) a hőmérséklettől függetlenek.

A gyakorlati alkalmazhatóság miatt a fenti egyenletek alapján diagramokat készítettek, görbeseregként ábrázolva a megoldást (1. ábra).



1. ábra $Y_i - Fo$ diagramokon található görbesereg vázlatos rajza

Az 1. ábrán használt jelölések:

$$Y = \frac{t - t_k}{t_o - t_k} = f\left(Fo, \frac{1}{Bi}, \frac{l}{l_0}\right) = f(Fo, m, n) \quad (9)$$

$$m = \frac{1}{Bi} \quad n = \frac{l}{l_0} \quad Fo = \frac{a\tau}{l_0^2} \quad Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{test}}$$

A diagramok előnye, hogy bárhol, bármikor, gyorsan és könnyen használhatók. Hátrányuk, hogy csak kevés görbesereg ábrázolható, mivel a vonalak egymásra kerülése megghiúsítja felismerésüket. $Y = 1$ és $Fo = 0$ környezetében szintén nagy a vonalak átfedése, így ebben a tartományban a diagram nem használható. Nem használható nagy Fo értékek esetén sem. A diagramról leolvasott értékek csak 10-20%-os pontosságot biztosítanak, így igényesebb műszaki feladatok megoldására nem alkalmasak. Ezért döntöttünk úgy, hogy könnyen kezelhető, felhasználóbarát programot fejlesztünk. Választásunk az Excel táblázatkezelőre esett, mivel annak beviteli felülete adott, ill. VBA makrójában tudományos igényességű feladatok is beprogramozhatók (RAJKÓ 2000).

Számítástechnikai nehézségek és megoldásuk

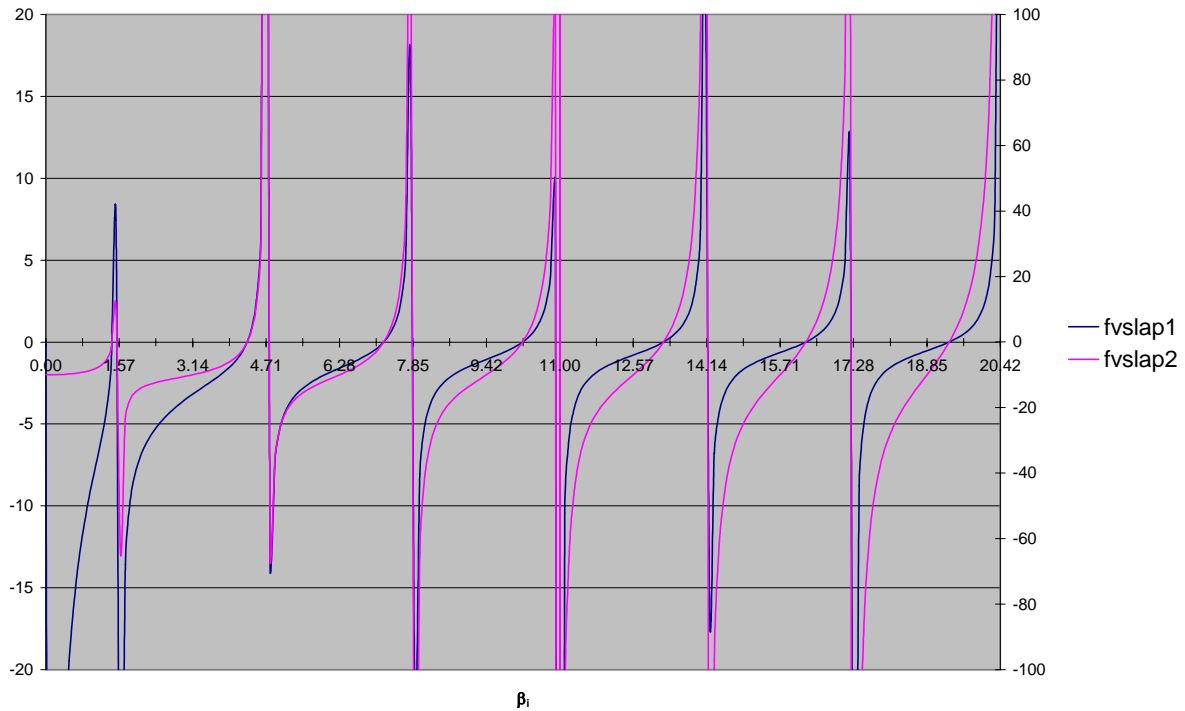
A (3), (5) és (7) egyenletek programozása nem jelentene problémát, ha ismernénk a (4), (6) és (8) egyenletek alapján nyerhető β_i gyököket.

A végtelen síklap esetében a (4) egyenlet gyökeinek meghatározása a feladat. Két függvénykapcsolattá rendezhetjük át az egyenletet, és e két függvény zérus helyeit kell meghatároznunk:

$$\beta_i \cdot \operatorname{tg}(\beta_i) = Bi \Rightarrow$$

$$\operatorname{fvslap1} = \operatorname{tg}(\beta_i) - \frac{Bi}{\beta_i} \quad (10)$$

$$\operatorname{fvslap2} = \beta_i \cdot \operatorname{tg}(\beta_i) - Bi$$



2. ábra A végtelen síklap esetén a transzcendens egyenlet gyökeinek meghatározásához felhasznált két függvénykapcsolat (fvslap1 és fvslap2) grafikonja

A 2. ábrán a két függvény lefutását szemlélhetjük meg. Látható, hogy a fvslap1 meredekebb lefutású, mint a fvslap2 az első néhány (tehát a fontosabb) gyök közelében, bár a függvények meredeksége függ a B_i szám értékétől. Az 1-7. táblázat különböző B_i szám értékek mellett kiszámolt gyök értékeket, a számításhoz szükséges relatív időket és a gyökhelyeken számított függvényértékeket tartalmazza. A táblázatok alapján az adott B_i értékhez kiválasztható melyik függvényt célszerű használni a gyökök meghatározásához. A gyökök megkereséséhez a Newton iterációs formulát alkalmaztuk (VALKÓ és VAJDA 1987), amelyhez a függvény deriváltját is fel kell használnunk:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \quad x_0 \text{ adott, } m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

A gyökök ismeretében a végtelen sor tagjaiból az előírt pontosságnak megfelelő számú tagot felhasználva kapjuk az Y_s értéket.

1. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,05$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,22176	6	2,77556E-17	0,22176	7	6,93889E-18
2	3,15743	5	3,81639E-17	3,15743	6	1,17961E-16
3	6,29113	5	-1,26635E-16	6,29113	6	-7,97973E-16
4	9,43008	5	-4,51028E-16	9,43008	6	-4,25354E-15
5	12,57035	5	5,72459E-17	12,57035	5	7,21645E-16
6	15,71115	5	-7,19477E-16	15,71115	5	-1,13035E-14
7	18,85221	5	-6,46184E-16	18,85221	5	-1,21847E-14
8	21,99342	5	-3,10949E-16	21,99342	5	-6,84175E-15
9	25,13473	5	-8,58254E-16	25,13473	5	-2,15800E-14
10	28,27610	5	1,46606E-15	28,27610	5	4,14530E-14
11	31,41752	5	8,42642E-16	31,41752	5	2,64719E-14
12	34,55897	5	6,83481E-16	34,55897	5	2,36200E-14
13	37,70044	5	4,98082E-16	37,70044	5	1,87766E-14
14	40,84193	5	-3,37621E-15	40,84193	5	-1,37897E-13
15	43,98343	5	2,84083E-15	43,98343	5	1,24949E-13
16	47,12495	5	2,78662E-15	47,12495	5	1,31319E-13
17	50,26648	5	1,09721E-15	50,26648	5	5,51503E-14
18	53,40801	5	2,98145E-15	53,40801	5	1,59234E-13
19	56,54955	5	1,77256E-15	56,54955	5	1,00239E-13
20	59,69110	5	8,41341E-17	59,69110	5	5,02376E-15
21	62,83265	5	1,33248E-15	62,83265	5	8,37247E-14
22	65,97420	5	3,43139E-15	65,97420	5	2,26381E-13
23	69,11576	5	-2,11745E-16	69,11576	5	-1,46341E-14
24	72,25732	5	-4,78968E-15	72,25732	5	-3,46091E-13
25	75,39889	5	-5,42264E-15	75,39889	5	-4,08860E-13
26	78,54045	5	-3,27754E-15	78,54045	5	-2,57419E-13
27	81,68202	5	-4,75856E-15	81,68202	5	-3,88682E-13
28	84,82359	5	-3,77411E-15	84,82359	5	-3,20133E-13
29	87,96516	5	2,80537E-15	87,96516	5	2,46775E-13
30	91,10674	5	-6,43799E-15	91,10674	5	-5,86552E-13

2. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,5$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,65327	4	0,00000E+00	0,65327	5	0,00000E+00
2	3,29231	5	-2,22045E-16	3,29231	6	-7,77156E-16
3	6,36162	5	-3,46945E-16	6,36162	6	-2,22045E-15
4	9,47749	5	-6,38378E-16	9,47749	6	-6,05072E-15
5	12,60601	5	8,81240E-16	12,60601	5	1,11022E-14
6	15,73972	5	5,06539E-16	15,73972	5	7,99361E-15
7	18,87604	5	5,89806E-16	18,87604	5	1,11022E-14
8	22,01386	5	1,30451E-15	22,01386	5	2,87548E-14
9	25,15262	5	-7,42462E-16	25,15262	5	-1,87073E-14
10	28,29200	5	-1,43635E-15	28,29200	5	-4,06342E-14
11	31,43183	5	1,08594E-15	31,43183	5	3,41949E-14
12	34,57198	5	1,65666E-15	34,57198	5	5,72875E-14
13	37,71237	5	-1,16226E-16	37,71237	5	-4,38538E-15
14	40,85294	5	8,70831E-16	40,85294	5	3,56382E-14
15	43,99366	5	-1,89952E-15	43,99366	5	-8,35443E-14
16	47,13450	5	-2,21177E-15	47,13450	5	-1,04250E-13
17	50,27543	5	-8,89913E-16	50,27543	5	-4,47420E-14
18	53,41644	5	2,21871E-15	53,41644	5	1,18572E-13
19	56,55751	5	3,32546E-15	56,55751	5	1,88072E-13
20	59,69864	5	2,96464E-15	59,69864	5	1,76970E-13
21	62,83981	5	2,00534E-15	62,83981	5	1,26010E-13
22	65,98102	5	4,61003E-15	65,98102	5	3,04201E-13
23	69,12227	5	-6,89986E-15	69,12227	5	-4,76952E-13
24	72,26355	5	2,71831E-15	72,26355	5	1,96398E-13
25	75,40485	5	-4,85376E-15	75,40485	5	-3,65985E-13
26	78,54618	5	-5,32647E-15	78,54618	5	-4,18332E-13
27	81,68753	5	2,20136E-15	81,68753	5	1,79856E-13
28	84,82890	5	-6,04464E-15	84,82890	5	-5,12757E-13
29	87,97028	5	1,20216E-15	87,97028	5	1,05804E-13
30	91,11167	5	-3,68022E-15	91,11167	5	-3,35343E-13
31	94,25308	5	4,16160E-15	94,25308	5	3,92242E-13
32	97,39451	5	-6,59195E-16	97,39451	5	-6,41709E-14
33	100,53594	5	-1,16834E-15	100,53594	5	-1,17517E-13
34	103,67738	5	5,41320E-15	103,67738	5	5,61218E-13
35	106,81883	5	2,86750E-15	106,81883	5	3,06311E-13
36	109,96029	5	-4,57967E-15	109,96029	5	-5,03597E-13
37	113,10176	5	-5,73153E-15	113,10176	5	-6,48259E-13
38	116,24323	5	-5,89719E-15	116,24323	5	-6,85507E-13
39	119,38471	5	-3,37577E-15	119,38471	5	-4,03011E-13
40	122,52619	5	6,69690E-15	122,52619	5	8,20455E-13

3. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 1$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,86033	4	0,00000E+00	0,86033	5	-1,11022E-16
2	3,42562	5	1,66533E-16	3,42562	6	6,66134E-16
3	6,43730	5	-3,33067E-16	6,43730	6	-2,22045E-15
4	9,52933	5	-5,27356E-16	9,52933	6	-5,10703E-15
5	12,64529	5	5,55112E-17	12,64529	5	6,66134E-16
6	15,77128	5	-4,57967E-16	15,77128	5	-7,10543E-15
7	18,90241	5	-1,37390E-15	18,90241	5	-2,58682E-14
8	22,03650	5	8,74301E-16	22,03650	5	1,93179E-14
9	25,17245	5	-4,51028E-16	25,17245	5	-1,14353E-14
10	28,30964	5	-8,04912E-16	28,30964	5	-2,27596E-14
11	31,44771	5	4,23273E-16	31,44771	5	1,33227E-14
12	34,58642	5	-1,81105E-15	34,58642	5	-6,26166E-14
13	37,72561	5	4,37150E-16	37,72561	5	1,64313E-14
14	40,86517	5	1,96024E-15	40,86517	5	8,01581E-14
15	44,00502	5	2,23085E-15	44,00502	5	9,81437E-14
16	47,14510	5	-4,16334E-16	47,14510	5	-1,96509E-14
17	50,28537	5	1,92554E-15	50,28537	5	9,68114E-14
18	53,42579	5	-2,87617E-15	53,42579	5	-1,53544E-13
19	56,56634	5	3,34455E-15	56,56634	5	1,89182E-13
20	59,70701	5	2,03657E-15	59,70701	5	1,21680E-13
21	62,84776	5	-2,45290E-15	62,84776	5	-1,54210E-13
22	65,98860	5	3,88752E-15	65,98860	5	2,56684E-13
23	69,12950	5	-4,00374E-15	69,12950	5	-2,76779E-13
24	72,27047	5	0,00000E+00	72,27047	5	0,00000E+00
25	75,41148	5	-4,17201E-15	75,41148	5	-3,14637E-13
26	78,55255	5	-6,06459E-15	78,55255	5	-4,76397E-13
27	81,69365	5	-4,64559E-15	81,69365	5	-3,79585E-13
28	84,83479	5	9,03791E-16	84,83479	5	7,66054E-14
29	87,97596	5	6,71338E-15	87,97596	5	5,90639E-13
30	91,11716	5	-3,98293E-15	91,11716	5	-3,62932E-13
31	94,25839	5	4,82253E-16	94,25839	5	4,55191E-14
32	97,39964	5	-5,95184E-15	97,39964	5	-5,79758E-13
33	100,54091	5	-1,79023E-15	100,54091	5	-1,79967E-13
34	103,68220	5	1,46758E-15	103,68220	5	1,52101E-13
35	106,82351	5	6,45317E-15	106,82351	5	6,89448E-13
36	109,96484	5	-2,11116E-15	109,96484	5	-2,32148E-13
37	113,10618	5	1,33747E-15	113,10618	5	1,51212E-13
38	116,24753	5	6,19296E-15	116,24753	5	7,19869E-13
39	119,38890	5	2,90219E-15	119,38890	5	3,46612E-13
40	122,53027	5	-5,49387E-15	122,53027	5	-6,73128E-13

4. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 5$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,31384	5	-1,33227E-15	1,31384	38	-1,77636E-15
2	4,03357	5	-2,22045E-16	4,03357	5	-8,88178E-16
3	6,90960	5	-1,11022E-16	6,90960	5	-8,88178E-16
4	9,89275	5	8,88178E-16	9,89275	5	8,88178E-15
5	12,93522	5	9,43690E-16	12,93522	5	1,24345E-14
6	16,01066	5	-2,05391E-15	16,01066	5	3,10862E-14
7	19,10552	5	-1,60982E-15	19,10552	5	-3,01981E-14
8	22,21256	5	1,08247E-15	22,21256	5	2,39808E-14
9	25,32765	5	-9,15934E-16	25,32765	5	-2,39808E-14
10	28,44831	5	1,02696E-15	28,44831	5	2,84217E-14
11	31,57299	5	1,77636E-15	31,57299	5	5,68434E-14
12	34,70062	5	-1,55431E-15	34,70062	5	-5,41789E-14
13	37,83052	5	3,88578E-16	37,83052	5	1,50990E-14
14	40,96217	5	4,16334E-17	40,96217	5	1,77636E-15
15	44,09521	5	2,96985E-15	44,09521	5	1,30562E-13
16	47,22936	5	3,02536E-15	47,22936	5	1,42997E-13
17	50,36443	5	1,12410E-15	50,36443	5	5,59552E-14
18	53,50026	5	1,31839E-15	53,50026	5	7,01661E-14
19	56,63672	5	3,01148E-15	56,63672	5	1,70530E-13
20	59,77371	5	-2,53964E-15	59,77371	5	-1,51879E-13
21	62,91116	5	-2,31759E-15	62,91116	5	-1,45661E-13
22	66,04900	5	5,55112E-16	66,04900	5	3,73035E-14
23	69,18718	5	-4,30211E-16	69,18718	5	-3,01981E-14
24	72,32565	5	3,77476E-15	72,32565	5	2,73559E-13
25	75,46438	5	6,17562E-15	75,46438	5	4,66294E-13
26	78,60334	5	-6,21725E-15	78,60334	5	-4,88498E-13
27	81,74250	5	-6,58501E-15	81,74250	5	-5,38236E-13
28	84,88184	5	-4,92661E-15	84,88184	5	-4,18332E-13
29	88,02134	5	-8,67362E-16	88,02134	5	-7,63833E-14
30	91,16098	5	-6,12704E-15	91,16098	5	-5,58664E-13
31	94,30075	5	-1,25594E-15	94,30075	5	-1,19016E-13
32	97,44064	5	1,45023E-15	97,44064	5	1,41220E-13
33	100,58064	5	-5,34989E-15	100,58064	5	-5,37348E-13
34	103,72073	5	3,80251E-15	103,72073	5	3,94351E-13
35	106,86091	5	-4,64212E-15	106,86091	5	-4,96492E-13
36	110,00117	5	-5,17641E-15	110,00117	5	-5,69322E-13
37	113,14150	5	6,21725E-15	113,14150	5	7,03437E-13
38	116,28190	5	-1,49186E-15	116,28190	5	-1,73195E-13
39	119,42236	5	-4,11476E-15	119,42236	5	-4,91163E-13
40	122,56289	5	-3,72619E-15	122,56289	5	-4,56524E-13

5. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 10$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,42887	4	-6,21725E-15	1,42887	37	-8,88178E-15
2	4,30580	7	-1,77636E-15	4,30580	9	-7,10543E-15
3	7,22811	5	4,44089E-16	7,22811	5	1,77636E-15
4	10,20026	4	-1,66533E-15	10,20026	4	-1,77636E-14
5	13,21419	5	-1,22125E-15	13,21419	5	-1,59872E-14
6	16,25936	5	-9,99201E-16	16,25936	5	-1,59872E-14
7	19,32703	5	2,22045E-15	19,32703	5	4,26326E-14
8	22,41085	5	1,27676E-15	22,41085	5	2,84217E-14
9	25,50638	5	-1,49880E-15	25,50638	5	-3,90799E-14
10	28,61058	5	1,44329E-15	28,61058	5	4,08562E-14
11	31,72131	5	1,83187E-15	31,72131	5	5,86198E-14
12	34,83705	5	-3,05311E-15	34,83705	5	-1,06581E-13
13	37,95672	5	-1,77636E-15	37,95672	5	-6,75016E-14
14	41,07949	5	2,77556E-17	41,07949	5	1,77636E-15
15	44,20477	5	-2,99760E-15	44,20477	5	-1,33227E-13
16	47,33210	5	-2,44249E-15	47,33210	5	-1,15463E-13
17	50,46112	5	2,49800E-16	50,46112	5	1,24345E-14
18	53,59155	5	-9,99201E-16	53,59155	5	-5,32907E-14
19	56,72317	5	-1,22125E-15	56,72317	5	-6,92779E-14
20	59,85580	5	1,99840E-15	59,85580	5	1,19016E-13
21	62,98930	5	-2,19269E-15	62,98930	5	-1,38556E-13
22	66,12354	5	-6,88338E-15	66,12354	5	-4,54747E-13
23	69,25843	5	6,77236E-15	69,25843	5	4,68958E-13
24	72,39390	5	6,21725E-15	72,39390	5	4,49418E-13
25	75,52986	5	-5,66214E-15	75,52986	5	-4,26326E-13
26	78,66626	5	3,02536E-15	78,66626	5	2,38032E-13
27	81,80305	5	1,49880E-15	81,80305	5	1,22569E-13
28	84,94019	5	-2,83107E-15	84,94019	5	-2,39808E-13
29	88,07765	5	-9,71445E-17	88,07765	5	-8,88178E-15
30	91,21538	5	-1,17961E-15	91,21538	5	-1,06581E-13
31	94,35337	5	1,84575E-15	94,35337	5	1,74083E-13
32	97,49159	5	1,22125E-15	97,49159	5	1,19016E-13
33	100,63001	5	3,06699E-15	100,63001	5	3,09086E-13
34	103,76863	5	-3,85803E-15	103,76863	5	-4,01457E-13
35	106,90742	5	-1,38778E-17	106,90742	5	-1,77636E-15
36	110,04636	5	4,27436E-15	110,04636	5	4,68958E-13
37	113,18546	5	3,16414E-15	113,18546	5	3,57048E-13
38	116,32468	5	6,32827E-15	116,32468	5	7,35412E-13
39	119,46403	5	-5,10703E-15	119,46403	5	-6,11067E-13
40	122,60350	5	3,30291E-15	122,60350	5	4,05009E-13

6. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 50$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,54001	4	8,52651E-14	1,54001	34	1,35003E-13
2	4,62025	34	-5,32907E-14	4,62025	34	-2,41585E-13
3	7,70116	34	-1,77636E-15	7,70116	34	-1,42109E-14
4	10,78316	34	2,66454E-15	10,78316	34	2,84217E-14
5	13,86663	34	3,99680E-15	13,86663	34	5,68434E-14
6	16,95188	34	6,21725E-15	16,95188	34	1,06581E-13
7	20,03917	9	-8,88178E-15	20,03917	10	-1,77636E-13
8	23,12868	7	4,44089E-15	23,12868	7	1,06581E-13
9	26,22055	6	-4,66294E-15	26,22055	6	-1,20792E-13
10	29,31485	6	-2,66454E-15	29,31485	6	-7,81597E-14
11	32,41159	6	9,99201E-15	32,41159	6	3,26850E-13
12	35,51077	5	1,55431E-15	35,51077	5	5,68434E-14
13	38,61232	5	8,43769E-15	38,61232	5	3,26850E-13
14	41,71618	5	2,44249E-15	41,71618	5	1,06581E-13
15	44,82225	4	2,66454E-15	44,82225	4	1,13687E-13
16	47,93042	4	-2,44249E-15	47,93042	4	-1,20792E-13
17	51,04058	4	5,55112E-16	51,04058	4	2,84217E-14
18	54,15262	4	-6,43929E-15	54,15262	4	-3,48166E-13
19	57,26643	4	3,99680E-15	57,26643	4	2,27374E-13
20	60,38188	4	5,21805E-15	60,38188	4	3,19744E-13
21	63,49887	5	-1,22125E-15	63,49887	5	-7,81597E-14
22	66,61730	5	1,04361E-14	66,61730	5	6,96332E-13
23	69,73707	5	-1,11022E-15	69,73707	5	-7,10543E-14
24	72,85808	5	-8,54872E-15	72,85808	5	-6,25278E-13
25	75,98025	5	-1,02141E-14	75,98025	5	7,74492E-13
26	79,10349	5	7,43849E-15	79,10349	5	5,89750E-13
27	82,22774	5	5,77316E-15	82,22774	5	4,76064E-13
28	85,35292	5	-6,43929E-15	85,35292	5	-5,54223E-13
29	88,47896	5	3,77476E-15	88,47896	5	3,33955E-13
30	91,60581	5	1,77636E-15	91,60581	5	1,56319E-13
31	94,73342	5	-3,21965E-15	94,73342	5	-3,05533E-13
32	97,86172	5	-1,66533E-15	97,86172	5	-1,63425E-13
33	100,99068	5	1,77636E-15	100,99068	5	1,77636E-13
34	104,12025	5	2,44249E-15	104,12025	5	2,55795E-13
35	107,25039	5	7,77156E-15	107,25039	5	8,38440E-13
36	110,38107	5	6,21725E-15	110,38107	5	6,89226E-13
37	113,51225	5	1,44329E-15	113,51225	5	1,63425E-13
38	116,64389	5	-3,27516E-15	116,64389	5	-3,83693E-13
39	119,77598	5	2,88658E-15	119,77598	5	3,48166E-13
40	122,90847	5	-6,88338E-15	122,90847	5	-8,45546E-13

7. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 100$ esetén

i	fvslap1			fvslap2		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,55525	4	2,41585E-13	1,55525	33	3,69482E-13
2	4,66577	33	-1,49214E-13	4,66577	33	-6,96332E-13
3	7,77637	33	-7,28306E-14	7,77637	33	-5,68434E-13
4	10,88713	33	-1,77636E-15	10,88713	33	-1,42109E-14
5	13,99809	33	-2,30926E-14	13,99809	33	-3,26850E-13
6	17,10931	33	-1,68754E-14	17,10931	33	-2,84217E-13
7	20,22083	33	-1,86517E-14	20,22083	33	-3,69482E-13
8	23,33272	33	2,13163E-14	23,33272	33	4,83169E-13
9	26,44501	33	-1,99840E-14	26,44501	33	-5,25802E-13
10	29,55774	33	1,33227E-14	29,55774	33	3,97904E-13
11	32,67095	33	-1,02141E-14	32,67095	33	-3,26850E-13
12	35,78467	33	-1,42109E-14	35,78467	33	-4,97380E-13
13	38,89893	12	1,73195E-14	38,89893	33	6,67910E-13
14	42,01376	8	2,22045E-15	42,01376	9	8,52651E-14
15	45,12917	7	-1,82077E-14	45,12917	8	-8,24230E-13
16	48,24518	7	-1,46549E-14	48,24518	7	-7,10543E-13
17	51,36180	7	-5,55112E-15	51,36180	7	-2,84217E-13
18	54,47904	6	1,77636E-15	54,47904	6	9,94760E-14
19	57,59690	6	8,65974E-15	57,59690	6	4,97380E-13
20	60,71539	6	-9,32587E-15	60,71539	6	-5,68434E-13
21	63,83451	6	-3,55271E-15	63,83451	6	-2,27374E-13
22	66,95425	5	-2,22045E-16	66,95425	5	-1,42109E-14
23	70,07461	5	3,55271E-15	70,07461	5	2,41585E-13
24	73,19557	5	1,39888E-14	73,19557	5	1,02318E-12
25	76,31714	5	1,08802E-14	76,31714	5	8,38440E-13
26	79,43930	5	6,21725E-15	79,43930	5	4,97380E-13
27	82,56204	5	1,11022E-14	82,56204	5	9,23706E-13
28	85,68534	4	6,21725E-15	85,68534	4	5,25802E-13
29	88,80919	4	-1,50990E-14	88,80919	4	-1,33582E-12
30	91,93359	4	3,33067E-15	91,93359	4	2,98428E-13
31	95,05851	4	-1,11022E-14	95,05851	4	-1,05160E-12
32	98,18393	3	-8,65974E-15	98,18393	3	-8,52651E-13
33	101,30986	3	1,04361E-14	101,30986	3	1,05160E-12
34	104,43626	4	-1,44329E-15	104,43626	4	-1,56319E-13
35	107,56313	4	1,16573E-14	107,56313	4	1,26477E-12
36	110,69044	4	8,54872E-15	110,69044	4	9,37916E-13
37	113,81820	4	-8,10463E-15	113,81820	4	-9,23706E-13
38	116,94637	4	-4,55191E-15	116,94637	4	-5,40012E-13
39	120,07495	4	-7,66054E-15	120,07495	4	-9,23706E-13
40	123,20393	4	-9,76996E-15	123,20393	4	-1,20792E-12

A végtelen henger esetében a (6) egyenlet gyökeinek meghatározása a feladat. Három függvénykapcsolattá rendezhetjük át az egyenletet, és e három függvény zérus helyeit kell meghatároznunk:

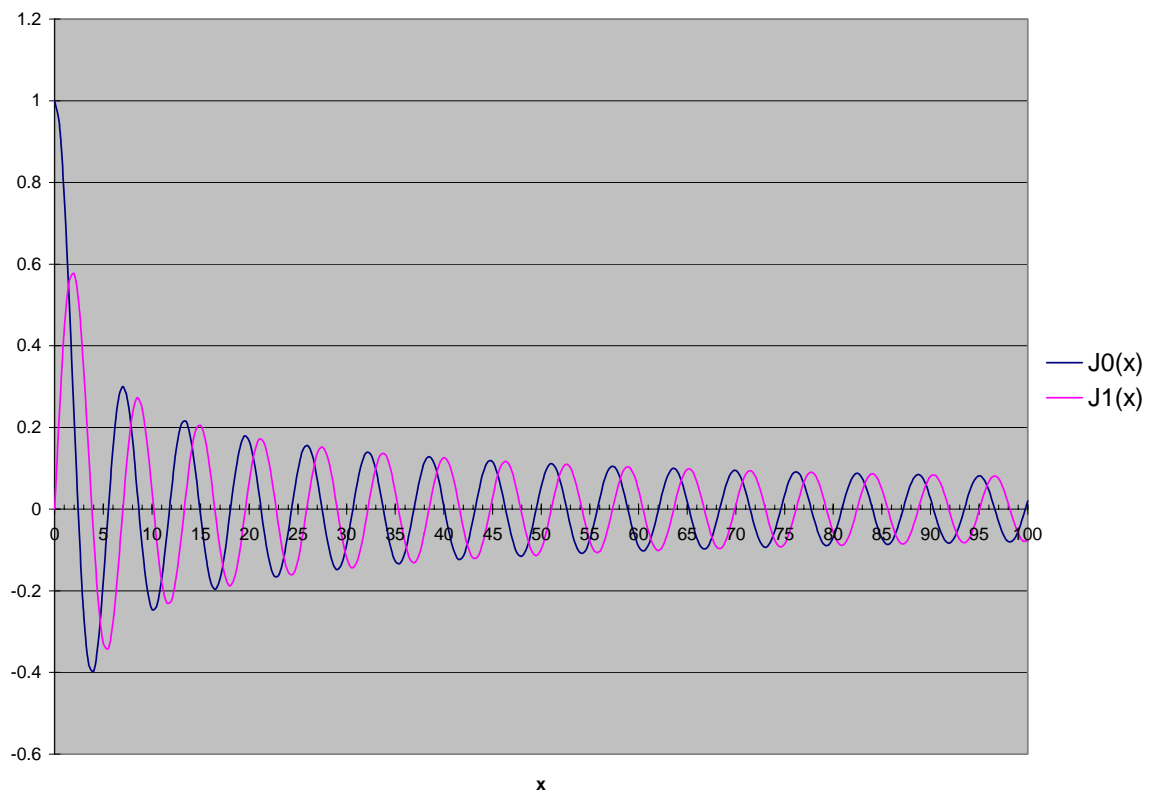
$$\beta_i = Bi \frac{J_0(\beta_i)}{J_1(\beta_i)} \Rightarrow$$

$$\text{fvheng1} = \beta_i - Bi \frac{J_0(\beta_i)}{J_1(\beta_i)} \quad (12)$$

$$\text{fvheng2} = 1 - \frac{Bi}{\beta_i} \cdot \frac{J_0(\beta_i)}{J_1(\beta_i)}$$

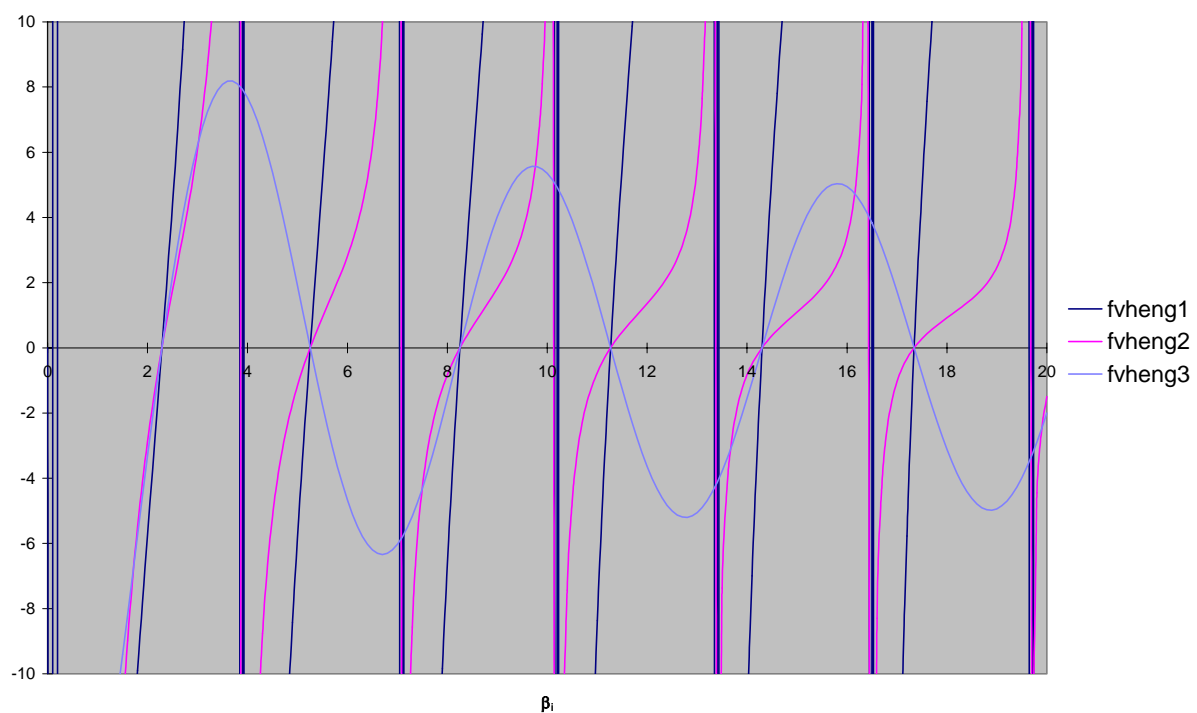
$$\text{fvheng3} = \beta_i \cdot J_1(\beta_i) - Bi \cdot J_0(\beta_i)$$

$J_0(\cdot)$ és $J_1(\cdot)$ az elsőfajú nulladrendű és másodrendű Bessel-függvények (ABRAMOWITZ and STEGUN 1972) (3. ábra).



3. ábra $J_0(\cdot)$ és $J_1(\cdot)$ elsőfajú nulladrendű és elsőrendű Bessel-függvények grafikonjai

A 4. ábrán a három függvény lefutását szemléltethetjük meg. Látható, hogy a fvheng1 meredekebb lefutású, mint a másik kettő, bár a függvények meredeksége most is függ a Bi szám értékétől. A 8-15. táblázat különböző Bi szám értékek mellett kiszámolt gyök értékeit, a számításhoz szükséges relatív időket és a gyökhelyeken számított függvényértékeket tartalmazza. A táblázatok alapján az adott Bi értékhez kiválasztható melyik függvényt célszerű használni a gyökök meghatározásához.. A gyökök megkereséséhez most is Newton iterációs formuláját használtuk. A gyökök ismeretében a végtelen sor tagjaiból az előírt pontosságnak megfelelő számú tagot felhasználva kapjuk az Y_h értéket.



4. ábra A végtelen henger esetén a transzcendens egyenlet gyökeinek meghatározásához felhasznált három függvénykapcsolat (fvheng1, fvheng2 és fvheng3) grafikonja

8. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,05$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,31426	7	5,55112E-17	0,31426	104	1,11022E-16	3,83171	3	2,01380E-02
2	3,84473	29	-3,06422E-14	3,84473	29	-7,54952E-15	3,84473	4	1,49186E-16
3	7,02271	27	3,86535E-12	7,02271	27	5,50449E-13	7,02271	4	-3,61343E-15
4	10,17838	26	-1,16174E-12	10,17838	26	-1,14131E-13	10,17838	4	1,42594E-15
5	13,32744	25	-8,43769E-13	13,32744	25	-6,35048E-14	13,32744	4	-6,92155E-16
6	16,47367	25	-1,49214E-12	16,47367	25	-9,05942E-14	16,47367	4	8,89913E-16
7	19,61841	24	-5,17986E-12	19,61841	24	-2,64011E-13	19,61841	4	-2,37657E-15
8	22,76228	24	-1,17382E-11	22,76228	24	-5,15810E-13	22,76228	4	4,31079E-15
9	25,90560	23	-2,52030E-11	25,90560	23	-9,72999E-13	25,90560	4	6,80359E-15
10	29,04855	23	1,46940E-11	29,04855	23	5,06040E-13	29,04855	4	-3,74440E-15
11	32,19123	23	4,99512E-11	32,19123	23	1,55165E-12	32,19123	4	1,09088E-14
12	35,33372	22	-2,08829E-11	35,33372	22	-1,06335E-11	35,33372	4	3,96558E-15
13	38,47607	22	-3,01888E-10	38,47607	22	-7,84617E-12	38,47607	4	-5,04579E-14
14	41,61830	22	3,30544E-11	41,61830	22	7,93920E-13	41,61830	3	-4,91100E-15
15	44,76044	22	-1,73777E-10	44,76044	22	8,84059E-12	44,76044	3	5,27122E-14
16	47,90250	22	-1,38407E-10	47,90250	21	-4,37332E-11	47,90250	3	1,66525E-14
17	51,04451	22	2,22784E-10	51,04451	21	-1,01432E-11	51,04451	3	2,43694E-14
18	54,18648	22	-2,77211E-10	54,18648	21	-5,11591E-12	54,18648	3	2,77244E-14
19	57,32840	21	-1,90454E-10	57,32840	21	-3,32023E-12	57,32840	3	-1,74930E-14
20	60,47028	21	4,69477E-10	60,47028	21	7,76357E-12	60,47028	3	-3,98284E-14
21	63,61214	21	-5,15996E-11	63,61214	21	-8,11129E-13	63,61214	3	-4,05752E-15
22	66,75398	21	-2,87898E-10	66,75398	20	-8,02030E-11	66,75398	3	2,10587E-14
23	69,89579	20	4,50200E-11	69,89579	20	6,44151E-13	69,89579	3	3,07306E-15
24	73,03758	20	6,13340E-11	73,03758	20	8,39773E-13	73,03758	3	-3,91961E-15
25	76,17936	20	1,80080E-10	76,17936	20	2,36400E-12	76,17936	3	1,08047E-14
26	79,32112	20	1,10333E-10	79,32112	20	1,39089E-12	79,32112	3	-6,23026E-15
27	82,46287	21	5,92280E-10	82,46287	20	7,18237E-12	82,46287	3	3,15529E-14
28	85,60460	21	-5,96259E-10	85,60460	20	-6,96532E-12	85,60460	3	3,00324E-14
29	88,74633	20	-2,19046E-10	88,74633	20	-2,46825E-12	88,74633	3	-1,04526E-14
30	91,88805	21	5,44745E-10	91,88805	19	-2,55233E-10	91,88805	3	-2,46721E-14
31	95,02976	21	1,18125E-09	95,02976	19	-4,15883E-11	95,02976	3	5,08690E-14
32	98,17146	19	-3,77298E-11	98,17146	19	-3,84359E-13	98,17146	3	1,54737E-15
33	101,31316	19	2,54360E-10	101,31316	19	2,51055E-12	101,31316	3	9,95124E-15
34	104,45484	20	8,60283E-10	104,45484	19	8,23586E-12	104,45484	3	-3,21475E-14
35	107,59653	19	-3,36243E-10	107,59653	19	-3,12528E-12	107,59653	3	-1,20190E-14
36	110,73821	20	9,50891E-10	110,73821	19	8,58680E-12	110,73821	3	-3,25525E-14
37	113,87988	20	7,02428E-10	113,87988	19	6,16807E-12	113,87988	3	2,30588E-14
38	117,02155	20	-1,35935E-09	117,02155	19	-1,16163E-11	117,02155	3	4,28390E-14
39	120,16321	19	4,16833E-10	120,16321	19	3,46889E-12	120,16321	3	1,26240E-14
40	123,30488	20	-2,04300E-09	123,30488	19	-1,65687E-11	123,30488	3	5,95253E-14

9. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,1$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,44168	7	0,00000E+00	0,44168	104	0,00000E+00	3,83171	5	4,02759E-02
2	3,85771	30	1,56763E-13	3,85771	30	9,21485E-15	3,85771	4	8,81240E-16
3	7,02983	28	1,33227E-13	7,02983	28	-1,35003E-13	7,02983	4	5,40193E-15
4	10,18329	27	-2,27374E-13	10,18329	27	-2,24265E-14	10,18329	4	5,58581E-16
5	13,33120	26	-1,53122E-12	13,33120	26	-1,14797E-13	13,33120	4	-2,50841E-15
6	16,47670	26	-3,29337E-12	16,47670	26	-2,00062E-13	16,47670	4	3,92741E-15
7	19,62096	25	-1,25056E-12	19,62096	25	-6,37268E-14	19,62096	4	-1,14839E-15
8	22,76448	25	2,95941E-12	22,76448	25	1,29785E-13	22,76448	4	-2,17187E-15
9	25,90753	24	-2,67910E-11	25,90753	24	-1,03428E-12	25,90753	4	-1,78330E-15
10	29,05027	24	5,42144E-12	29,05027	24	1,86517E-13	29,05027	4	-2,76168E-15
11	32,19279	24	5,48539E-12	32,19279	24	1,70419E-13	32,19279	4	2,39565E-15
12	35,33514	23	-1,16714E-10	35,33514	23	-3,30180E-12	35,33514	4	4,43309E-14
13	38,47737	23	-5,20615E-11	38,47737	23	-1,35181E-12	38,47737	4	-1,73889E-14
14	41,61950	23	-1,27507E-10	41,61950	23	-3,06355E-12	41,61950	4	3,78864E-14
15	44,76155	23	-9,76570E-11	44,76155	23	-2,18181E-12	44,76155	4	-2,60174E-14
16	47,90355	23	-7,93037E-11	47,90355	22	-3,56937E-11	47,90355	4	1,90820E-14
17	51,04549	22	-1,84997E-10	51,04549	22	3,63032E-12	51,04549	4	-4,04711E-14
18	54,18740	22	4,76561E-11	54,18740	22	8,79519E-13	54,18740	4	-9,53231E-15
19	57,32927	22	6,09433E-11	57,32927	22	1,06304E-12	57,32927	3	1,12011E-14
20	60,47111	22	-4,89777E-11	60,47111	22	-8,09797E-13	60,47111	3	8,31973E-15
21	63,61293	22	8,76810E-12	63,61293	22	1,37779E-13	63,61293	3	1,37911E-15
22	66,75472	22	-8,73683E-11	66,75472	21	-6,77145E-11	66,75472	3	1,27814E-14
23	69,89650	21	-4,56765E-10	69,89650	21	-6,53499E-12	69,89650	3	3,24324E-14
24	73,03826	21	1,86432E-10	73,03826	21	2,55229E-12	73,03826	3	-2,38299E-14
25	76,18001	21	-7,56302E-11	76,18001	21	-9,92761E-13	76,18001	3	-9,07434E-15
26	79,32175	21	-2,45961E-10	79,32175	21	-3,10085E-12	79,32175	3	2,77781E-14
27	82,46347	21	2,42636E-10	82,46347	21	2,94220E-12	82,46347	3	2,58508E-14
28	85,60519	21	2,95174E-10	85,60519	21	3,44802E-12	85,60519	3	-2,97349E-14
29	88,74689	21	-4,48495E-11	88,74689	21	-5,05374E-13	88,74689	3	-4,27956E-15
30	91,88859	21	2,36994E-10	91,88859	20	-2,45526E-10	91,88859	3	-2,14672E-14
31	95,03028	22	-6,33705E-10	95,03028	20	-4,71825E-11	95,03028	3	-5,45796E-14
32	98,17197	20	-3,70676E-10	98,17197	20	-3,77587E-12	98,17197	3	3,04045E-14
33	101,31365	22	5,63091E-10	101,31365	20	-8,83982E-12	101,31365	3	4,40568E-14
34	104,45532	20	1,00101E-10	104,45532	20	9,58122E-13	104,45532	3	-7,48099E-15
35	107,59699	20	-3,43789E-10	107,59699	20	-3,19522E-12	107,59699	3	-2,45767E-14
36	110,73866	21	7,34374E-10	110,73866	20	6,63170E-12	110,73866	3	-5,02810E-14
37	113,88032	20	2,31552E-10	113,88032	20	2,03315E-12	113,88032	3	1,52022E-14
38	117,02198	20	-2,78220E-10	117,02198	20	-2,37743E-12	117,02198	3	1,75355E-14
39	120,16363	20	-4,98346E-10	120,16363	20	-4,14735E-12	120,16363	3	-3,01859E-14
40	123,30528	21	8,61334E-10	123,30528	20	6,98541E-12	123,30528	3	-5,01916E-14

10. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,5$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,94077	6	1,11022E-16	0,94077	106	-6,66134E-16	0,94077	6	5,55112E-17
2	3,95937	33	4,21885E-14	3,95937	33	1,06581E-14	3,95937	5	1,72085E-15
3	7,08638	31	3,98792E-13	7,08638	31	5,62883E-14	7,08638	5	8,40994E-15
4	10,22246	30	-1,54543E-13	10,22246	30	-1,50990E-14	10,22246	4	1,87350E-15
5	13,36115	29	1,56319E-13	13,36115	29	1,16573E-14	13,36115	4	1,27676E-15
6	16,50095	28	-4,01457E-13	16,50095	28	-2,44249E-14	16,50095	4	2,37310E-15
7	19,64133	28	6,99885E-13	19,64133	28	3,56382E-14	19,64133	4	3,20577E-15
8	22,78204	27	-1,48503E-12	22,78204	27	-6,52811E-14	22,78204	4	5,44009E-15
9	25,92296	27	-1,93623E-12	25,92296	27	-7,46070E-14	25,92296	4	-5,85643E-15
10	29,06404	26	-1,66516E-11	29,06404	26	-5,72875E-13	29,06404	4	-3,45557E-15
11	32,20521	26	6,11777E-12	32,20521	26	1,89959E-13	32,20521	4	1,33504E-14
12	35,34646	26	3,51008E-12	35,34646	26	9,91429E-14	35,34646	4	-6,64746E-15
13	38,48776	26	6,11067E-13	38,48776	26	1,58762E-14	38,48776	4	1,02696E-15
14	41,62911	25	-7,14806E-12	41,62911	25	-1,71418E-13	41,62911	4	1,06026E-14
15	44,77049	25	-3,29337E-11	44,77049	25	5,37237E-13	44,77049	4	3,20299E-14
16	47,91190	25	-4,57803E-11	47,91190	25	4,06342E-13	47,91190	4	5,50740E-14
17	51,05333	25	4,78408E-11	51,05333	25	9,37139E-13	51,05333	4	5,23193E-14
18	54,19478	25	6,80700E-12	54,19478	25	1,25455E-13	54,19478	4	-6,80705E-15
19	57,33625	24	-4,80398E-11	57,33625	24	-8,37996E-13	57,33625	4	4,17166E-14
20	60,47773	24	-5,51807E-11	60,47773	24	8,06577E-13	60,47773	4	4,68098E-14
21	63,61922	24	-7,21982E-11	63,61922	24	6,73350E-13	63,61922	4	-5,67602E-14
22	66,76072	24	-1,74794E-12	66,76072	24	-2,62013E-14	66,76072	4	1,27676E-15
23	69,90222	24	-5,65592E-12	69,90222	24	-8,10463E-14	69,90222	4	-3,86496E-15
24	73,04374	24	4,24336E-11	73,04374	24	5,80869E-13	73,04374	4	-2,71103E-14
25	76,18526	24	-2,83222E-11	76,18526	23	-2,63567E-11	76,18526	4	-1,69864E-14
26	79,32679	23	-3,24150E-10	79,32679	23	-4,08629E-12	79,32679	4	-1,89571E-14
27	82,46832	23	-8,73399E-11	82,46832	23	-1,05915E-12	82,46832	4	-4,65322E-14
28	85,60986	23	-3,98330E-11	85,60986	23	-4,65405E-13	85,60986	4	2,00603E-14
29	88,75140	23	-4,18652E-11	88,75140	23	-4,71623E-13	88,75140	4	-1,99771E-14
30	91,89295	23	-2,02220E-11	91,89295	23	-2,20046E-13	91,89295	4	9,15934E-15
31	95,03449	23	-1,43530E-12	95,03449	23	-1,50990E-14	95,03449	4	-6,17562E-16
32	98,17604	23	-9,74438E-11	98,17604	23	-9,92539E-13	98,17604	4	3,99680E-14
33	101,31760	23	-5,09459E-11	101,31760	23	-5,02931E-13	101,31760	4	-1,99285E-14
34	104,45915	23	-3,60814E-11	104,45915	22	-1,16135E-10	104,45915	4	1,34823E-14
35	107,60071	23	-6,04530E-11	107,60071	22	-2,80862E-11	107,60071	4	-2,16077E-14
36	110,74227	23	4,17799E-11	110,74227	22	-5,91771E-12	110,74227	4	-1,43011E-14
37	113,88383	22	-3,06329E-10	113,88383	22	-2,68985E-12	113,88383	4	2,04420E-14
38	117,02539	22	4,23483E-11	117,02539	22	3,61933E-13	117,02539	4	-1,33435E-14
39	120,16696	22	-8,71978E-11	120,16696	22	-7,25642E-13	120,16696	4	-2,64094E-14
40	123,30853	22	-4,23483E-12	123,30853	22	-3,44169E-14	123,30853	4	1,23512E-15

11. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 1$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,25578	5	-4,44089E-16	1,25578	8	0,00000E+00	1,25578	5	0,00000E+00
2	4,07948	34	1,77636E-15	4,07948	34	-8,88178E-16	4,07948	5	-1,11022E-16
3	7,15580	32	-3,17968E-13	7,15580	32	-8,21565E-15	7,15580	5	-4,99600E-15
4	10,27099	31	-4,61853E-14	10,27099	31	-4,44089E-15	10,27099	5	1,11022E-15
5	13,39840	30	-6,21725E-14	13,39840	30	-4,66294E-15	13,39840	4	-9,99201E-16
6	16,53116	29	-1,81188E-13	16,53116	29	-1,11022E-14	16,53116	4	2,13718E-15
7	19,66673	29	-5,68434E-13	19,66673	29	-2,88658E-14	19,66673	4	-5,19029E-15
8	22,80395	28	-3,19744E-14	22,80395	28	-1,33227E-15	22,80395	4	2,22045E-16
9	25,94223	28	7,06990E-13	25,94223	28	2,72005E-14	25,94223	4	4,24660E-15
10	29,08122	28	-1,46727E-12	29,08122	28	-5,04041E-14	29,08122	4	7,46625E-15
11	32,22072	27	2,49401E-12	32,22072	27	7,74936E-14	32,22072	4	1,08802E-14
12	35,36059	27	-1,18447E-11	35,36059	27	1,67977E-13	35,36059	4	-2,25375E-14
13	38,50074	27	9,23706E-14	38,50074	27	2,44249E-15	38,50074	4	2,77556E-16
14	41,64111	26	-1,73870E-11	41,64111	26	1,74083E-13	41,64111	4	5,16254E-14
15	44,78165	26	-1,56319E-11	44,78165	26	-3,49054E-13	44,78165	4	3,42643E-14
16	47,92233	26	6,05382E-12	47,92233	26	1,26454E-13	47,92233	4	-1,45578E-14
17	51,06312	26	1,47580E-11	51,06312	26	-4,36762E-13	51,06312	4	3,22797E-14
18	54,20400	26	-6,23857E-12	54,20400	26	-1,15019E-13	54,20400	4	1,24761E-14
19	57,34496	25	-6,50289E-11	57,34496	25	-1,13398E-12	57,34496	4	-3,35981E-14
20	60,48599	25	6,36646E-12	60,48599	25	1,05138E-13	60,48599	4	-1,07969E-14
21	63,62707	25	1,40403E-11	63,62707	25	2,20712E-13	63,62707	4	2,20657E-14
22	66,76820	25	-1,70246E-11	66,76820	25	-2,54907E-13	66,76820	4	2,48968E-14
23	69,90938	25	4,61853E-12	69,90938	25	6,60583E-14	69,90938	4	6,30052E-15
24	73,05058	25	2,93170E-11	73,05058	25	4,01346E-13	73,05058	4	-3,74561E-14
25	76,19182	25	1,29319E-12	76,19182	25	1,69864E-14	76,19182	4	1,54043E-15
26	79,33309	24	-2,75705E-10	79,33309	24	-3,47522E-12	79,33309	4	8,28504E-15
27	82,47439	24	-3,29550E-11	82,47439	24	-3,99458E-13	82,47439	4	-3,51108E-14
28	85,61570	24	-5,10454E-11	85,61570	24	-5,96190E-13	85,61570	4	5,14033E-14
29	88,75703	24	2,71712E-11	88,75703	24	3,06088E-13	88,75703	4	2,59237E-14
30	91,89839	24	-2,38458E-11	91,89839	24	-2,59570E-13	91,89839	4	2,15938E-14
31	95,03975	24	6,07514E-11	95,03975	24	6,39155E-13	95,03975	4	5,23193E-14
32	98,18114	24	-2,55085E-11	98,18114	24	-2,59792E-13	98,18114	4	2,09277E-14
33	101,32253	24	6,52420E-11	101,32253	24	6,43929E-13	101,32253	4	5,10425E-14
34	104,46394	24	-4,38973E-11	104,46394	24	-4,20108E-13	104,46394	4	3,28071E-14
35	107,60536	24	-7,65397E-11	107,60536	23	-2,82387E-11	107,60536	4	-5,47062E-14
36	110,74678	24	-4,52900E-11	110,74678	23	-6,70464E-12	110,74678	4	3,10030E-14
37	113,88822	23	-1,94134E-10	113,88822	23	-1,70464E-12	113,88822	4	-6,45317E-15
38	117,02967	23	2,64606E-11	117,02967	23	2,26152E-13	117,02967	4	-1,66672E-14
39	120,17112	23	-5,27507E-11	120,17112	23	-4,38982E-13	120,17112	4	-3,19467E-14
40	123,31258	23	9,46727E-11	123,31258	23	7,67608E-13	123,31258	4	-5,51642E-14

12. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 5$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,98981	4	-1,77636E-15	1,98981	4	3,33067E-16	1,98981	4	-1,11022E-15
2	4,71314	6	3,55271E-15	4,71314	6	-1,55431E-15	4,71314	5	-1,11022E-15
3	7,61771	8	-2,57572E-14	7,61771	34	-8,43769E-15	7,61771	5	6,66134E-16
4	10,62230	33	-8,88178E-15	10,62230	33	-8,88178E-16	10,62230	5	8,88178E-16
5	13,67856	32	-3,55271E-15	13,67856	32	-2,22045E-16	13,67856	5	-2,22045E-16
6	16,76298	32	6,75016E-14	16,76298	32	3,88578E-15	16,76298	5	-3,77476E-15
7	19,86397	31	-4,26326E-14	19,86397	31	-1,99840E-15	19,86397	5	-1,88738E-15
8	22,97536	31	4,61853E-14	22,97536	31	1,99840E-15	22,97536	5	-1,66533E-15
9	26,09368	30	3,55271E-15	26,09368	30	2,22045E-16	26,09368	5	1,11022E-16
10	29,21681	30	-1,91847E-13	29,21681	30	-6,43929E-15	29,21681	5	4,77396E-15
11	32,34342	30	1,56319E-13	32,34342	30	4,88498E-15	32,34342	5	3,44169E-15
12	35,47261	29	-3,41061E-13	35,47261	29	-1,08802E-14	35,47261	5	7,10543E-15
13	38,60378	29	-1,84741E-13	38,60378	29	-4,66294E-15	38,60378	4	-3,10862E-15
14	41,73650	29	5,18696E-13	41,73650	29	1,17684E-14	41,73650	4	-7,10543E-15
15	44,87043	29	2,62901E-13	44,87043	29	5,10703E-15	44,87043	4	3,55271E-15
16	48,00535	28	-4,51905E-12	48,00535	28	-9,39249E-14	48,00535	4	5,39568E-14
17	51,14109	28	-8,24230E-13	51,14109	28	-1,53211E-14	51,14109	4	-8,99281E-15
18	54,27749	28	5,06617E-12	54,27749	28	9,32587E-14	54,27749	4	3,33067E-14
19	57,41446	28	1,59872E-12	57,41446	28	2,85327E-14	57,41446	4	1,46549E-14
20	60,55190	28	-5,73408E-12	60,55190	28	-9,45910E-14	60,55190	4	4,84057E-14
21	63,68975	28	3,36087E-12	63,68975	28	-1,28786E-13	63,68975	4	2,63123E-14
22	66,82795	27	-1,03171E-11	66,82795	27	-1,54543E-13	66,82795	4	-1,77081E-14
23	69,96645	27	-2,44427E-12	69,96645	27	-3,50830E-14	69,96645	4	-1,65978E-14
24	73,10522	27	3,75167E-12	73,10522	27	5,11813E-14	73,10522	4	-2,39253E-14
25	76,24421	27	-2,08900E-12	76,24421	27	-2,73115E-14	76,24421	4	-1,25455E-14
26	79,38341	27	-3,99325E-12	79,38341	27	-5,01821E-14	79,38341	4	2,24820E-14
27	82,52280	27	8,10019E-12	82,52280	27	9,80327E-14	82,52280	4	4,30211E-14
28	85,66234	27	-6,29541E-12	85,66234	27	-7,37188E-14	85,66234	4	3,16414E-14
29	88,80203	27	-6,84963E-12	88,80203	27	-7,70495E-14	88,80203	4	-3,25850E-14
30	91,94185	26	-3,29123E-11	91,94185	26	-3,58158E-13	91,94185	4	4,00235E-14
31	95,08178	26	-1,22355E-11	95,08178	26	-1,28786E-13	95,08178	4	-5,25691E-14
32	98,22183	26	-1,17950E-11	98,22183	26	-1,20126E-13	98,22183	4	4,82947E-14
33	101,36196	26	-1,19371E-11	101,36196	26	-1,17684E-13	101,36196	4	-4,66294E-14
34	104,50219	26	1,48361E-11	104,50219	26	1,41998E-13	104,50219	4	-5,53446E-14
35	107,64249	26	-1,64562E-11	107,64249	26	-1,52989E-13	107,64249	4	-5,87308E-14
36	110,78287	26	-2,70006E-12	110,78287	26	-2,42029E-14	110,78287	4	9,21485E-15
37	113,92331	26	1,35287E-11	113,92331	26	1,18794E-13	113,92331	4	4,43534E-14
38	117,06382	26	8,71125E-12	117,06382	26	7,43849E-14	117,06382	4	-2,74225E-14
39	120,20438	26	1,04734E-11	120,20438	26	8,71525E-14	120,20438	4	3,16969E-14
40	123,34499	26	-2,03499E-11	123,34499	26	-1,64979E-13	123,34499	4	5,92304E-14

13. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 10$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	2,17950	4	-2,66454E-15	2,17950	5	-1,33227E-15	2,17950	4	1,99840E-15
2	5,03321	5	0,00000E+00	5,03321	5	-3,77476E-15	5,03321	4	6,21725E-15
3	7,95688	5	4,97380E-14	7,95688	6	6,21725E-15	7,95688	4	1,08802E-14
4	10,93633	6	-1,59872E-14	10,93633	7	-1,55431E-15	10,93633	5	2,44249E-15
5	13,95803	8	1,95399E-14	13,95803	9	1,44329E-15	13,95803	5	2,44249E-15
6	17,00988	32	-7,10543E-15	17,00988	33	-2,22045E-16	17,00988	5	6,66134E-16
7	20,08291	32	-4,61853E-14	20,08291	32	-2,22045E-15	20,08291	5	-3,77476E-15
8	23,17096	32	1,10134E-13	23,17096	32	4,66294E-15	23,17096	5	-7,10543E-15
9	26,26984	31	-6,39488E-14	26,26984	31	-2,22045E-15	26,26984	5	-3,55271E-15
10	29,37672	31	3,19744E-14	29,37672	31	9,99201E-16	29,37672	5	-1,55431E-15
11	32,48961	31	1,20792E-13	32,48961	31	3,66374E-15	32,48961	5	4,88498E-15
12	35,60713	30	-4,33431E-13	35,60713	30	-1,02141E-14	35,60713	5	1,33227E-14
13	38,72827	30	5,54223E-13	38,72827	30	1,45439E-14	38,72827	5	1,77636E-14
14	41,85228	30	6,25278E-13	41,85228	30	1,32117E-14	41,85228	5	-1,79856E-14
15	44,97861	30	1,36424E-12	44,97861	30	-3,50830E-14	44,97861	5	-4,06342E-14
16	48,10685	30	-1,49214E-12	48,10685	30	3,89688E-14	48,10685	5	-4,39648E-14
17	51,23664	29	1,98952E-13	51,23664	29	2,33147E-15	51,23664	5	2,44249E-15
18	54,36776	29	-9,45022E-13	54,36776	29	-1,86517E-14	54,36776	5	1,97620E-14
19	57,49997	29	-3,41061E-12	57,49997	29	-5,92859E-14	57,49997	5	2,42029E-14
20	60,63313	29	1,27898E-12	60,63313	29	2,09832E-14	60,63313	4	-2,13163E-14
21	63,76710	29	4,10694E-12	63,76710	29	-2,73115E-14	63,76710	4	6,36158E-14
22	66,90176	29	-1,59162E-12	66,90176	29	-2,35367E-14	66,90176	4	2,29816E-14
23	70,03704	28	1,94689E-12	70,03704	28	2,77556E-14	70,03704	4	2,62013E-14
24	73,17284	28	3,19744E-12	73,17284	28	4,35207E-14	73,17284	4	-4,03011E-14
25	76,30911	28	1,22213E-12	76,30911	28	1,60982E-14	76,30911	4	1,44329E-14
26	79,44580	28	2,27374E-13	79,44580	28	2,88658E-15	79,44580	4	-2,55351E-15
27	82,58285	28	2,81375E-12	82,58285	28	3,39728E-14	82,58285	4	2,97540E-14
28	85,72023	28	1,09424E-12	85,72023	28	1,26565E-14	85,72023	4	-1,08802E-14
29	88,85791	28	3,11218E-12	88,85791	28	3,49720E-14	88,85791	4	2,95319E-14
30	91,99584	28	2,25953E-12	91,99584	28	2,44249E-14	91,99584	4	-2,03171E-14
31	95,13402	27	-3,04112E-12	95,13402	27	-3,19744E-14	95,13402	4	-2,60902E-14
32	98,27241	27	3,29692E-12	98,27241	27	3,35287E-14	98,27241	4	-2,68674E-14
33	101,41100	27	-7,67386E-13	101,41100	27	-7,54952E-15	101,41100	4	-5,88418E-15
34	104,54977	27	-1,03739E-12	104,54977	27	-9,76996E-15	104,54977	4	7,66054E-15
35	107,68870	27	1,80478E-12	107,68870	27	1,67644E-14	107,68870	4	1,27676E-14
36	110,82778	27	-5,61329E-12	110,82778	27	-5,06262E-14	110,82778	4	3,83027E-14
37	113,96699	27	-6,09646E-12	113,96699	27	-5,35127E-14	113,96699	4	-3,98570E-14
38	117,10634	27	-6,13909E-12	117,10634	27	-5,24025E-14	117,10634	4	3,85247E-14
39	120,24580	27	4,17799E-12	120,24580	27	3,48610E-14	120,24580	4	2,52021E-14
40	123,38537	27	2,95586E-12	123,38537	27	2,39808E-14	123,38537	4	-1,70974E-14

14. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 50$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	2,35724	4	1,99840E-14	2,35724	5	8,65974E-15	2,35724	4	1,06581E-14
2	5,41120	3	1,33227E-14	5,41120	3	3,77476E-15	5,41120	3	-4,66294E-15
3	8,48399	4	-1,06581E-14	8,48399	4	-1,33227E-15	8,48399	4	-3,10862E-15
4	11,56208	4	-2,84217E-14	11,56208	4	-2,66454E-15	11,56208	4	6,66134E-15
5	14,64331	4	-1,06581E-14	14,64331	4	-8,88178E-16	14,64331	4	-2,22045E-15
6	17,72718	4	5,32907E-14	17,72718	4	2,88658E-15	17,72718	4	-9,32587E-15
7	20,81361	4	-7,46070E-14	20,81361	5	-3,55271E-15	20,81361	4	-1,19904E-14
8	23,90263	5	-1,06581E-14	23,90263	5	-4,44089E-16	23,90263	4	1,77636E-15
9	26,99424	5	2,48690E-14	26,99424	5	9,99201E-16	26,99424	4	3,55271E-15
10	30,08845	5	-7,81597E-14	30,08845	5	-2,44249E-15	30,08845	4	9,76996E-15
11	33,18525	5	9,23706E-14	33,18525	5	2,66454E-15	33,18525	4	1,06581E-14
12	36,28457	5	3,12639E-13	36,28457	5	8,65974E-15	36,28457	4	-3,37508E-14
13	39,38634	5	-1,84741E-13	39,38634	6	-4,88498E-15	39,38634	4	-1,90958E-14
14	42,49046	6	-5,68434E-14	42,49046	6	-1,55431E-15	42,49046	4	5,32907E-15
15	45,59683	6	1,42109E-14	45,59683	6	4,44089E-16	45,59683	4	8,88178E-16
16	48,70532	6	3,19744E-13	48,70532	6	-6,66134E-16	48,70532	4	2,66454E-15
17	51,81581	6	2,84217E-13	51,81581	6	5,21805E-15	51,81581	4	2,22045E-14
18	54,92819	6	-7,67386E-13	54,92819	6	8,10463E-15	54,92819	5	-3,24185E-14
19	58,04233	7	6,53699E-13	58,04233	7	1,14353E-14	58,04233	5	4,52971E-14
20	61,15812	7	-3,41061E-13	61,15812	7	-5,55112E-15	61,15812	5	2,22045E-14
21	64,27544	7	4,12115E-13	64,27544	7	6,55032E-15	64,27544	5	2,53131E-14
22	67,39418	8	-6,67910E-13	67,39418	8	-9,99201E-15	67,39418	5	3,90799E-14
23	70,51425	8	-4,97380E-13	70,51425	8	-7,10543E-15	70,51425	5	-2,75335E-14
24	73,63556	9	1,09424E-12	73,63556	9	1,47660E-14	73,63556	5	-5,72875E-14
25	76,75801	10	4,97380E-13	76,75801	11	6,55032E-15	76,75801	5	2,48690E-14
26	79,88153	30	-3,83693E-13	79,88153	30	-4,88498E-15	79,88153	5	1,86517E-14
27	83,00603	30	9,09495E-13	83,00603	30	1,09912E-14	83,00603	5	4,13003E-14
28	86,13145	30	9,37916E-13	86,13145	30	1,08802E-14	86,13145	5	-4,04121E-14
29	89,25773	30	6,39488E-13	89,25773	30	7,10543E-15	89,25773	5	2,62013E-14
30	92,38481	30	-1,16529E-12	92,38481	30	-1,24345E-14	92,38481	5	4,61853E-14
31	95,51263	30	-7,10543E-13	95,51263	30	-7,32747E-15	95,51263	5	-2,70894E-14
32	98,64113	30	1,13687E-12	98,64113	30	1,16573E-14	98,64113	5	-4,17444E-14
33	101,77029	30	-1,29319E-12	101,77029	30	-1,26565E-14	101,77029	5	-4,48530E-14
34	104,90004	29	9,09495E-13	104,90004	29	8,54872E-15	104,90004	5	-3,06422E-14
35	108,03036	29	-1,22213E-12	108,03036	29	-1,13243E-14	108,03036	5	-3,95239E-14
36	111,16120	29	1,52056E-12	111,16120	29	1,37668E-14	111,16120	5	-4,70735E-14
37	114,29253	29	1,49214E-12	114,29253	29	1,32117E-14	114,29253	5	4,48530E-14
38	117,42433	29	-1,47793E-12	117,42433	29	-1,26565E-14	117,42433	5	4,26326E-14
39	120,55656	29	-8,52651E-14	120,55656	29	-4,44089E-16	120,55656	5	-2,22045E-15
40	123,68920	29	-2,30216E-12	123,68920	29	-1,84297E-14	123,68920	5	6,17284E-14

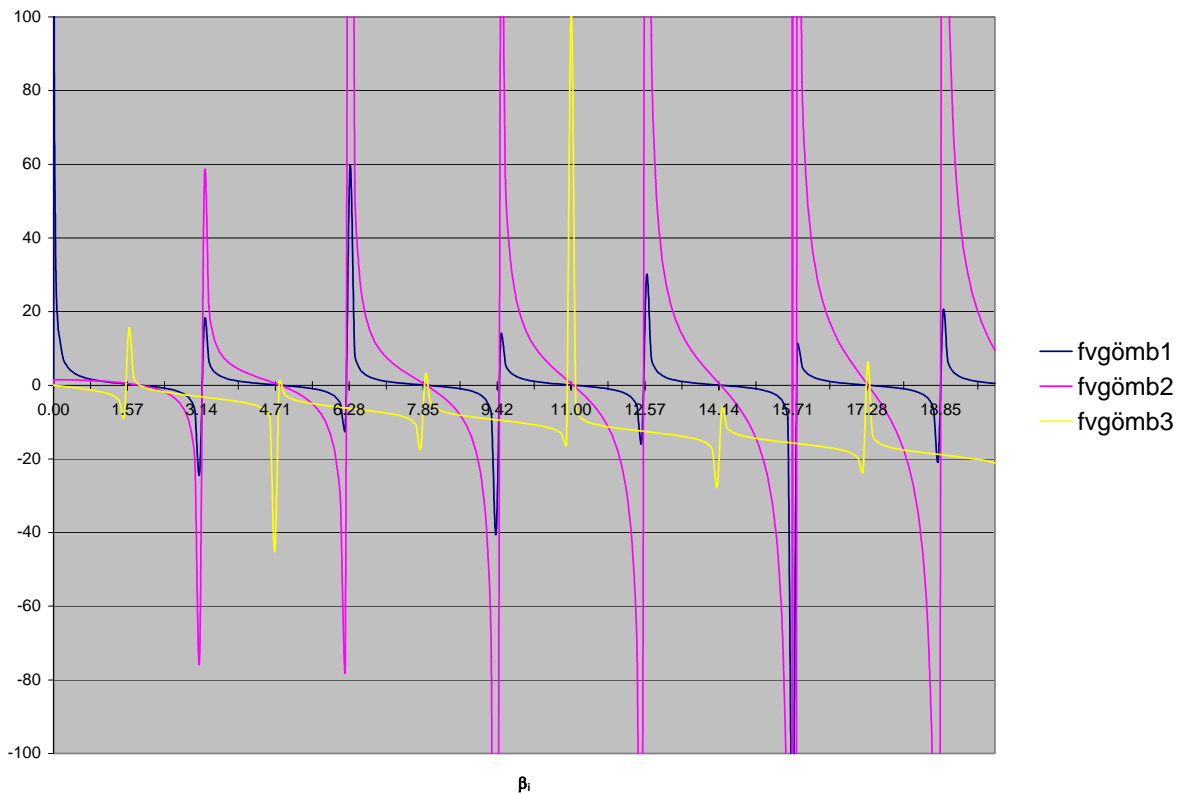
15. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 100$ esetén

i	fvheng1			fvheng2			fvheng3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	2,38090	4	-5,32907E-14	2,38090	5	-1,28786E-14	2,38090	4	-1,59872E-14
2	5,46521	3	1,10134E-13	5,46521	4	3,60822E-14	5,46521	3	1,11022E-15
3	8,56783	3	3,55271E-15	8,56783	3	3,33067E-16	8,56783	3	8,88178E-16
4	11,67474	3	6,57252E-14	11,67474	4	5,77316E-15	11,67474	3	-1,55431E-14
5	14,78342	4	8,70415E-14	14,78342	4	5,99520E-15	14,78342	4	1,82077E-14
6	17,89314	4	8,17124E-14	17,89314	4	4,55191E-15	17,89314	4	-1,50990E-14
7	21,00360	4	1,52767E-13	21,00360	4	7,32747E-15	21,00360	4	2,62013E-14
8	24,11470	4	1,59872E-13	24,11470	4	6,55032E-15	24,11470	4	-2,53131E-14
9	27,22639	4	7,10543E-15	27,22639	4	1,11022E-16	27,22639	4	8,88178E-16
10	30,33865	4	9,59233E-14	30,33865	4	3,10862E-15	30,33865	4	-1,33227E-14
11	33,45150	4	9,94760E-14	33,45150	4	2,99760E-15	33,45150	4	1,33227E-14
12	36,56493	4	-7,10543E-14	36,56493	4	-1,99840E-15	36,56493	4	8,88178E-15
13	39,67897	4	1,63425E-13	39,67897	4	4,10783E-15	39,67897	4	1,95399E-14
14	42,79362	4	-4,26326E-13	42,79362	5	1,27676E-14	42,79362	4	4,79616E-14
15	45,90890	5	7,10543E-14	45,90890	5	1,66533E-15	45,90890	4	7,99361E-15
16	49,02481	5	-3,12639E-13	49,02481	5	-6,21725E-15	49,02481	4	3,19744E-14
17	52,14137	5	-4,12115E-13	52,14137	5	-7,99361E-15	52,14137	4	-3,99680E-14
18	55,25856	5	-3,69482E-13	55,25856	5	-6,88338E-15	55,25856	4	3,46390E-14
19	58,37641	5	3,55271E-13	58,37641	5	6,32827E-15	58,37641	4	3,19744E-14
20	61,49489	5	5,18696E-13	61,49489	5	8,43769E-15	61,49489	4	6,39488E-14
21	64,61402	5	-3,83693E-13	64,61402	5	-5,77316E-15	64,61402	4	-3,19744E-14
22	67,73379	5	-4,54747E-13	67,73379	5	-6,66134E-15	67,73379	4	3,64153E-14
23	70,85418	5	6,11067E-13	70,85418	5	8,65974E-15	70,85418	4	4,70735E-14
24	73,97520	5	6,53699E-13	73,97520	5	8,77076E-15	73,97520	4	-4,88498E-14
25	77,09682	5	-3,55271E-13	77,09682	5	-4,66294E-15	77,09682	4	-2,57572E-14
26	80,21904	5	3,55271E-13	80,21904	5	4,32987E-15	80,21904	4	-2,48690E-14
27	83,34184	6	-1,27898E-13	83,34184	6	-1,55431E-15	83,34184	4	-8,88178E-15
28	86,46521	6	-1,42109E-13	86,46521	6	-1,77636E-15	86,46521	4	8,88178E-15
29	89,58914	6	-6,53699E-13	89,58914	6	-7,32747E-15	89,58914	4	-4,17444E-14
30	92,71362	6	1,22213E-12	92,71362	6	1,32117E-14	92,71362	4	-7,46070E-14
31	95,83861	6	-3,41061E-13	95,83861	6	-3,55271E-15	95,83861	4	-2,04281E-14
32	98,96413	6	8,66862E-13	98,96413	6	8,77076E-15	98,96413	4	-4,97380E-14
33	102,09013	6	-8,52651E-13	102,09013	6	-8,43769E-15	102,09013	4	-4,70735E-14
34	105,21662	6	-2,84217E-14	105,21662	6	-2,22045E-16	105,21662	4	8,88178E-16
35	108,34357	6	8,52651E-13	108,34357	6	7,77156E-15	108,34357	5	4,44089E-14
36	111,47097	6	-1,09424E-12	111,47097	6	-9,99201E-15	111,47097	5	5,50671E-14
37	114,59881	6	2,55795E-13	114,59881	7	2,10942E-15	114,59881	5	1,24345E-14
38	117,72707	7	-1,26477E-12	117,72707	7	-1,08802E-14	117,72707	5	6,03961E-14
39	120,85573	7	1,40687E-12	120,85573	7	1,16573E-14	120,85573	5	6,48370E-14
40	123,98479	7	-1,49214E-12	123,98479	7	-1,19904E-14	123,98479	5	6,75016E-14

A tömör gömb esetében a (8) egyenlet gyökeinek meghatározása a feladat. Három függvénykapcsolattá rendezhetjük át az egyenletet, és e három függvény zérus helyeit kell meghatároznunk:

$$\beta_i \cdot \cot(\beta_i) = 1 - Bi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{fvgömb1} &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_i\right) - \frac{1 - Bi}{\beta_i} \\ \text{fvgömb2} &= -\beta_i \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_i\right) - (1 - Bi) \\ \text{fvgömb3} &= (1 - Bi) \cdot \operatorname{tg}(\beta_i) - \beta_i \end{aligned} \quad (13)$$



5. ábra Tömör gömb esetén a transzcendens egyenlet gyökeinek meghatározásához felhasznált három függvénykapcsolat (fvgömb1, fvgömb2 és fvgömb3) grafikonja

A 4. ábrán a három függvény lefutását szemléltethetjük meg. Látható, hogy a fvgömb2 meredekebb lefutású, mint a másik kettő, bár a függvények meredeksége most is függ a Bi szám értékétől. A 16-23. táblázat különböző Bi szám értékek mellett kiszámolt gyök értékeket, a számításhoz szükséges relatív időket és a gyökhelyeken számított függvényértékeket tartalmazza. A táblázatok alapján az adott Bi értékhez kiválasztható melyik

függvényt célszerű használni a gyökök meghatározásához.. A gyökök megkereséséhez most is Newton iterációs formuláját használtuk. A gyökök ismeretében a végtelen sor tagjaiból az előírt pontosságnak megfelelő számú tagot felhasználva kapjuk az Y_g értéket.

16. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,05$ esetén

i	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,38537	6	4,44089E-16	0,38537	7	-1,11022E-16	0,38537	8	0,00000E+00
2	4,50454	4	-8,32667E-17	4,50454	4	-4,44089E-16	4,50454	36	3,55271E-15
3	7,73172	4	4,77396E-15	7,73172	4	4,77396E-15	7,73172	34	2,04281E-14
4	10,90871	4	3,33067E-16	10,90871	3	3,66374E-15	10,90871	33	-3,55271E-14
5	14,06975	3	2,22045E-16	14,06975	3	2,99760E-15	14,06975	32	-3,01981E-14
6	17,22366	3	2,12330E-15	17,22366	3	-8,60423E-14	17,22366	32	-8,52651E-14
7	20,37376	3	2,26902E-15	20,37376	3	-9,86988E-14	20,37376	31	-1,88294E-13
8	23,52158	3	-1,87350E-16	23,52158	3	-4,44089E-15	23,52158	31	-8,91731E-13
9	26,66793	3	6,24500E-17	26,66793	3	1,66533E-15	26,66793	30	-1,32871E-12
10	29,81328	3	1,33227E-15	29,81328	3	3,96350E-14	29,81328	30	4,72511E-13
11	32,95791	3	-1,21431E-15	32,95791	3	-3,99680E-14	32,95791	30	-5,75540E-13
12	36,10201	3	2,14412E-15	36,10201	3	7,73825E-14	36,10201	29	4,44800E-12
13	39,24571	3	-1,67921E-15	39,24571	3	-6,59472E-14	39,24571	29	-6,39488E-14
14	42,38909	3	1,63411E-15	42,38909	3	6,92779E-14	42,38909	29	-6,33094E-12
15	45,53223	3	7,66748E-16	45,53223	3	3,48610E-14	45,53223	29	-5,41434E-12
16	48,67517	3	1,70003E-15	48,67517	3	8,28226E-14	48,67517	28	-8,51941E-12
17	51,81795	3	-1,47105E-15	51,81795	3	-7,62723E-14	51,81795	28	-6,82121E-13
18	54,96059	3	-2,74780E-15	54,96059	3	-1,50990E-13	54,96059	28	3,27560E-12
19	58,10312	3	-2,89699E-15	58,10312	3	-1,68421E-13	58,10312	28	4,20641E-12
20	61,24555	3	1,45717E-16	61,24555	3	8,88178E-15	61,24555	28	-7,34701E-12
21	64,38790	3	-6,40980E-15	64,38790	3	-4,12670E-13	64,38790	27	-1,05302E-11
22	67,53018	3	-2,28290E-15	67,53018	3	-1,54210E-13	67,53018	27	-3,13776E-11
23	70,67239	3	-6,47572E-15	70,67239	3	-4,57634E-13	70,67239	27	-1,23208E-11
24	73,81456	3	-4,30211E-15	73,81456	3	-3,17635E-13	73,81456	27	-2,59064E-11
25	76,95668	3	-2,28810E-15	76,95668	3	-1,76081E-13	76,95668	27	-4,07141E-11
26	80,09875	3	-3,16414E-15	80,09875	3	-2,53464E-13	80,09875	27	-3,81846E-11
27	83,24079	3	-1,30104E-16	83,24079	3	-1,07692E-14	83,24079	27	4,02736E-11
28	86,38280	3	3,77649E-15	86,38280	3	3,26295E-13	86,38280	27	1,26761E-11
29	89,52478	3	6,23286E-15	89,52478	3	5,57998E-13	89,52478	26	-7,10543E-12
30	92,66673	3	1,62717E-15	92,66673	3	1,50768E-13	92,66673	26	3,40208E-11
31	95,80866	3	-1,35308E-15	95,80866	3	-1,29674E-13	95,80866	26	6,51852E-11
32	98,95057	3	1,55605E-15	98,95057	3	1,53988E-13	98,95057	26	3,95204E-11
33	102,09246	3	-5,06539E-16	102,09246	3	-5,17364E-14	102,09246	26	6,47020E-11
34	105,23433	3	-1,07206E-15	105,23433	3	-1,12688E-13	105,23433	26	7,53317E-11
35	108,37618	3	5,80785E-15	108,37618	3	6,29385E-13	108,37618	26	-5,17275E-12
36	111,51802	3	-4,91621E-15	111,51802	3	-5,48228E-13	111,51802	26	-5,11022E-11
37	114,65985	3	-5,95878E-15	114,65985	3	-6,83120E-13	114,65985	26	-3,96199E-11
38	117,80166	3	2,76341E-15	117,80166	3	3,25517E-13	117,80166	26	3,83835E-11
39	120,94346	3	3,98466E-15	120,94346	3	4,81948E-13	120,94346	26	2,16431E-11
40	124,08525	3	-4,02716E-15	124,08525	3	-4,99711E-13	124,08525	26	-7,76907E-11

17. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,1$ esetén

i	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	0,54228	6	8,88178E-16	0,54228	7	-2,22045E-16	0,54228	7	0,00000E+00
2	4,51566	4	-1,38778E-16	4,51566	4	-5,55112E-16	4,51566	35	4,44089E-15
3	7,73820	4	-4,32987E-15	7,73820	4	-4,32987E-15	7,73820	34	-1,77636E-14
4	10,91329	4	8,32667E-17	10,91329	4	9,99201E-16	10,91329	33	-3,55271E-15
5	14,07330	3	-3,05311E-16	14,07330	3	-4,44089E-15	14,07330	32	8,34888E-14
6	17,22656	3	-2,84495E-15	17,22656	3	7,36078E-14	17,22656	31	3,69482E-13
7	20,37621	3	1,74166E-15	20,37621	3	3,55271E-14	20,37621	31	4,26326E-14
8	23,52370	3	-4,37844E-15	23,52370	3	6,43929E-14	23,52370	31	-5,50671E-13
9	26,66980	3	-5,30825E-15	26,66980	3	4,79616E-14	26,66980	30	3,19744E-14
10	29,81495	3	-3,67067E-15	29,81495	3	1,02474E-13	29,81495	30	-1,57740E-12
11	32,95942	3	2,26208E-15	32,95942	3	7,46070E-14	32,95942	29	3,77298E-12
12	36,10339	3	-5,23886E-16	36,10339	3	-1,88738E-14	36,10339	29	-1,72662E-12
13	39,24698	3	-2,51882E-15	39,24698	3	-9,89209E-14	39,24698	29	1,37845E-12
14	42,39027	3	1,24206E-15	42,39027	3	5,26246E-14	42,39027	29	-5,90461E-12
15	45,53333	3	-1,22125E-15	45,53333	3	-5,56222E-14	45,53333	28	-1,14397E-12
16	48,67620	3	-2,25514E-16	48,67620	3	-1,11022E-14	48,67620	28	-3,91509E-12
17	51,81891	3	-7,00828E-16	51,81891	3	-3,63043E-14	51,81891	28	-3,03402E-12
18	54,96150	3	-2,27249E-15	54,96150	3	-1,24900E-13	54,96150	28	1,86873E-12
19	58,10398	3	-1,32359E-15	58,10398	3	-7,69385E-14	58,10398	28	-1,47082E-12
20	61,24636	3	-3,05658E-15	61,24636	3	-1,87184E-13	61,24636	28	5,57776E-12
21	64,38867	3	6,27970E-15	64,38867	3	4,04343E-13	64,38867	27	-4,09273E-12
22	67,53092	3	-6,54858E-15	67,53092	3	-4,42202E-13	67,53092	27	-1,15108E-11
23	70,67310	3	-7,08981E-15	70,67310	3	-5,01044E-13	70,67310	27	-9,60654E-12
24	73,81524	3	-5,99000E-15	73,81524	3	-4,42202E-13	73,81524	27	-1,71241E-11
25	76,95733	3	2,58994E-15	76,95733	3	1,99285E-13	76,95733	27	1,84315E-11
26	80,09938	3	4,25875E-15	80,09938	3	3,41172E-13	80,09938	27	8,05755E-12
27	83,24139	3	-2,25514E-16	83,24139	3	-1,87628E-14	83,24139	27	4,32436E-11
28	86,38338	3	1,82840E-15	86,38338	3	1,57874E-13	86,38338	27	2,95444E-11
29	89,52534	3	-1,50227E-15	89,52534	3	-1,34448E-13	89,52534	26	6,13767E-11
30	92,66727	3	7,03257E-15	92,66727	3	6,51701E-13	92,66727	26	-1,56746E-11
31	95,80918	3	1,43809E-15	95,80918	3	1,37668E-13	95,80918	26	4,03162E-11
32	98,95107	3	6,90420E-16	98,95107	3	6,82787E-14	98,95107	26	5,11307E-11
33	102,09295	3	4,86590E-15	102,09295	3	4,96714E-13	102,09295	26	6,08225E-12
34	105,23480	3	-6,14786E-15	105,23480	3	-6,46927E-13	105,23480	26	-3,28839E-11
35	108,37664	3	-4,65773E-15	108,37664	3	-5,04707E-13	108,37664	26	-5,43281E-11
36	111,51847	3	-9,87058E-16	111,51847	3	-1,10134E-13	111,51847	26	8,81357E-11
37	114,66028	3	3,51108E-15	114,66028	3	4,02567E-13	114,66028	26	2,74554E-11
38	117,80208	3	1,93335E-15	117,80208	3	2,27818E-13	117,80208	26	5,33049E-11
39	120,94388	3	5,41581E-15	120,94388	3	6,54921E-13	120,94388	26	-3,97904E-13
40	124,08566	3	4,62824E-15	124,08566	3	5,74318E-13	124,08566	25	1,30598E-11

18. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,5$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,16556	4	-1,66533E-16	1,16556	5	-3,33067E-16	0,00000	2	0,00000E+00
2	4,60422	4	-2,91434E-16	4,60422	4	-1,33227E-15	3,14159	2	-3,14159E+00
3	7,78988	4	-7,21645E-15	7,78988	4	-7,21645E-15	6,28319	2	-6,28319E+00
4	10,94994	3	-2,49800E-16	10,94994	4	-2,77556E-15	9,42478	2	-9,42478E+00
5	14,10173	3	2,08167E-16	14,10173	3	2,99760E-15	12,56637	2	-1,25664E+01
6	17,24978	3	-1,04083E-16	17,24978	3	-1,94289E-15	15,70796	2	-1,57080E+01
7	20,39584	3	2,14759E-15	20,39584	3	-1,01086E-13	18,84956	2	-1,88496E+01
8	23,54071	3	7,91034E-16	23,54071	3	1,85407E-14	21,99115	2	-2,19911E+01
9	26,68480	3	2,04697E-16	26,68480	3	5,55112E-15	25,13274	2	-2,51327E+01
10	29,82837	3	3,62557E-15	29,82837	3	-1,03806E-13	28,27433	2	-2,82743E+01
11	32,97156	3	-3,29251E-15	32,97156	3	-1,08580E-13	31,41593	2	-3,14159E+01
12	36,11447	3	-5,13478E-16	36,11447	3	-1,85962E-14	34,55752	2	-3,45575E+01
13	39,25717	3	-2,67147E-16	39,25717	3	-1,04916E-14	37,69911	2	-3,76991E+01
14	42,39971	3	3,22312E-15	42,39971	3	1,36668E-13	40,84070	2	-4,08407E+01
15	45,54212	3	3,21965E-15	45,54212	3	1,46549E-13	43,98230	2	-4,39823E+01
16	48,68442	3	-3,45730E-15	48,68442	3	-1,68310E-13	47,12389	2	-4,71239E+01
17	51,82663	3	3,40179E-15	51,82663	3	1,76303E-13	50,26548	2	-5,02655E+01
18	54,96878	3	1,48839E-15	54,96878	3	8,18234E-14	53,40708	2	-5,34071E+01
19	58,11086	3	3,04617E-15	58,11086	3	1,76970E-13	56,54867	2	-5,65487E+01
20	61,25289	3	3,50241E-15	61,25289	3	2,14606E-13	59,69026	2	-5,96903E+01
21	64,39488	3	-6,94497E-15	64,39488	3	-4,47198E-13	62,83185	2	-6,28319E+01
22	67,53684	3	-4,62130E-15	67,53684	3	-3,12084E-13	65,97345	2	-6,59734E+01
23	70,67876	3	-6,93976E-15	70,67876	3	-4,90497E-13	69,11504	2	-6,91150E+01
24	73,82065	3	6,65960E-15	73,82065	3	4,91607E-13	72,25663	2	-7,22566E+01
25	76,96252	3	-4,56666E-15	76,96252	3	-3,51497E-13	75,39822	2	-7,53982E+01
26	80,10437	3	-5,81479E-15	80,10437	3	-4,65794E-13	78,53982	2	-7,85398E+01
27	83,24620	3	-5,81219E-15	83,24620	3	-4,83835E-13	81,68141	2	-8,16814E+01
28	86,38801	3	3,11470E-15	86,38801	3	2,69118E-13	84,82300	2	-8,48230E+01
29	89,52981	3	-6,62751E-15	89,52981	3	-5,93359E-13	87,96459	2	-8,79646E+01
30	92,67159	3	-1,18308E-15	92,67159	3	-1,09690E-13	91,10619	2	-9,11062E+01
31	95,81336	3	-4,17114E-15	95,81336	3	-3,99680E-13	94,24778	2	-9,42478E+01
32	98,95512	3	-5,28657E-15	98,95512	3	-5,23137E-13	97,38937	2	-9,73894E+01
33	102,09686	3	-2,27249E-15	102,09686	3	-2,32037E-13	100,53096	2	-1,00531E+02
34	105,23860	3	8,30065E-16	105,23860	3	8,73746E-14	103,67256	2	-1,03673E+02
35	108,38033	3	-9,73180E-16	108,38033	3	-1,05471E-13	106,81415	2	-1,06814E+02
36	111,52206	3	-7,48533E-16	111,52206	3	-8,34888E-14	109,95574	2	-1,09956E+02
37	114,66377	3	5,42968E-16	114,66377	3	6,22835E-14	113,09734	2	-1,13097E+02
38	117,80548	3	-5,73673E-15	117,80548	3	-6,75848E-13	116,23893	2	-1,16239E+02
39	120,94718	3	-3,35669E-16	120,94718	3	-4,05787E-14	119,38052	2	-1,19381E+02
40	124,08888	3	-1,39559E-15	124,08888	3	-1,73195E-13	122,52211	2	-1,22522E+02

19. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 1$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,57080	2	-3,21629E-16	1,57080	2	-5,05213E-16	1,57080	0	0,00000E+00
2	4,71239	1	2,44921E-16	4,71239	1	1,15416E-15	4,71239	0	0,00000E+00
3	7,85398	1	2,88541E-15	7,85398	1	2,88541E-15	7,85398	0	0,00000E+00
4	10,99557	1	4,89843E-16	10,99557	1	5,38610E-15	10,99557	0	0,00000E+00
5	14,13717	1	6,12303E-16	14,13717	1	8,65623E-15	14,13717	0	0,00000E+00
6	17,27876	1	7,34764E-16	17,27876	1	1,26958E-14	17,27876	0	0,00000E+00
7	20,42035	1	4,40994E-15	20,42035	1	9,00525E-14	20,42035	0	0,00000E+00
8	23,56194	1	9,79685E-16	23,56194	1	2,30833E-14	23,56194	0	0,00000E+00
9	26,70354	1	4,65486E-15	26,70354	1	1,24301E-13	26,70354	0	0,00000E+00
10	29,84513	1	1,22461E-15	29,84513	1	3,65485E-14	29,84513	0	0,00000E+00
11	32,98672	1	-2,20565E-15	32,98672	1	-7,27571E-14	32,98672	0	0,00000E+00
12	36,12832	1	1,46953E-15	36,12832	1	5,30916E-14	36,12832	0	0,00000E+00
13	39,26991	1	-1,96073E-15	39,26991	1	-7,69975E-14	39,26991	0	0,00000E+00
14	42,41150	1	1,71445E-15	42,41150	1	7,27124E-14	42,41150	0	0,00000E+00
15	45,55309	1	-1,71580E-15	45,55309	1	-7,81602E-14	45,55309	0	0,00000E+00
16	48,69469	1	1,95937E-15	48,69469	1	9,54109E-14	48,69469	0	0,00000E+00
17	51,83628	1	-1,47088E-15	51,83628	1	-7,62451E-14	51,83628	0	0,00000E+00
18	54,97787	1	2,20429E-15	54,97787	1	1,21187E-13	54,97787	0	0,00000E+00
19	58,11946	1	-1,22596E-15	58,11946	1	-7,12522E-14	58,11946	0	0,00000E+00
20	61,26106	1	2,44921E-15	61,26106	1	1,50041E-13	61,26106	0	0,00000E+00
21	64,40265	1	-9,81040E-16	64,40265	1	-6,31816E-14	64,40265	0	0,00000E+00
22	67,54424	1	-4,41129E-15	67,54424	1	-2,97957E-13	67,54424	0	0,00000E+00
23	70,68583	1	6,36931E-15	70,68583	1	4,50220E-13	70,68583	0	0,00000E+00
24	73,82743	1	2,93906E-15	73,82743	1	2,16983E-13	73,82743	0	0,00000E+00
25	76,96902	1	-4,91198E-16	76,96902	1	-3,78070E-14	76,96902	0	0,00000E+00
26	80,11061	1	-3,92145E-15	80,11061	1	-3,14150E-13	80,11061	0	0,00000E+00
27	83,25221	1	6,85915E-15	83,25221	1	5,71039E-13	83,25221	0	0,00000E+00
28	86,39380	1	3,42890E-15	86,39380	1	2,96236E-13	86,39380	0	0,00000E+00
29	89,53539	1	-1,35525E-18	89,53539	1	-1,21343E-16	89,53539	0	0,00000E+00
30	92,67698	1	-3,43161E-15	92,67698	1	-3,18031E-13	92,67698	0	0,00000E+00
31	95,81858	1	-6,86186E-15	95,81858	1	-6,57494E-13	95,81858	0	0,00000E+00
32	98,96017	1	3,91874E-15	98,96017	1	3,87799E-13	98,96017	0	0,00000E+00
33	102,10176	1	4,88487E-16	102,10176	1	4,98754E-14	102,10176	0	0,00000E+00
34	105,24335	1	-2,94177E-15	105,24335	1	-3,09601E-13	105,24335	0	0,00000E+00
35	108,38495	1	-6,37202E-15	108,38495	1	-6,90631E-13	108,38495	0	0,00000E+00
36	111,52654	1	4,40858E-15	111,52654	1	4,91674E-13	111,52654	0	0,00000E+00
37	114,66813	1	9,78330E-16	114,66813	1	1,12183E-13	114,66813	0	0,00000E+00
38	117,80972	1	-2,45192E-15	117,80972	1	-2,88860E-13	117,80972	0	0,00000E+00
39	120,95132	1	-5,88218E-15	120,95132	1	-7,11457E-13	120,95132	0	0,00000E+00
40	124,09291	1	4,89843E-15	124,09291	1	6,07860E-13	124,09291	0	0,00000E+00

20. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 5$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	2,57043	5	4,44089E-16	2,57043	38	4,44089E-16	2,57043	5	4,44089E-16
2	5,35403	5	-7,77156E-16	5,35403	6	4,44089E-15	5,35403	5	5,32907E-15
3	8,30293	5	-8,88178E-16	8,30293	5	-8,88178E-16	8,30293	7	-3,55271E-15
4	11,33483	5	1,11022E-16	11,33483	5	1,33227E-15	11,33483	35	1,77636E-15
5	14,40797	4	-3,88578E-16	14,40797	4	-5,32907E-15	14,40797	34	-2,48690E-14
6	17,50343	4	-1,94289E-16	17,50343	4	-3,55271E-15	17,50343	34	1,24345E-13
7	20,61203	4	-1,22125E-15	20,61203	4	-2,39808E-14	20,61203	33	6,39488E-14
8	23,72895	4	4,44089E-15	23,72895	4	-6,83897E-14	23,72895	33	-1,56319E-13
9	26,85142	4	-2,24820E-15	26,85142	4	1,35891E-13	26,85142	32	-8,88178E-14
10	29,97778	4	4,94049E-15	29,97778	4	-6,92779E-14	29,97778	32	-1,24345E-13
11	33,10696	4	-4,16334E-17	33,10696	4	-8,88178E-16	33,10696	32	4,68958E-13
12	36,23825	4	3,34455E-15	36,23825	4	1,21236E-13	36,23825	31	-6,96332E-13
13	39,37116	4	1,05471E-15	39,37116	4	4,13003E-14	39,37116	31	1,08002E-12
14	42,50533	4	-1,80411E-16	42,50533	4	-7,99361E-15	42,50533	31	6,96332E-13
15	45,64051	3	3,15026E-15	45,64051	4	1,43885E-13	45,64051	31	-1,19371E-12
16	48,77651	3	-3,13638E-15	48,77651	4	-1,52767E-13	48,77651	31	-8,38440E-13
17	51,91318	3	2,65066E-15	51,91318	4	1,38112E-13	51,91318	30	-1,87583E-12
18	55,05040	3	-2,58127E-15	55,05040	3	-1,42109E-13	55,05040	30	-6,46594E-13
19	58,18810	3	3,19189E-15	58,18810	3	1,86073E-13	58,18810	30	-1,89004E-12
20	61,32619	3	2,74780E-15	61,32619	3	1,68310E-13	61,32619	30	-2,51532E-12
21	64,46462	3	4,71845E-16	64,46462	3	3,01981E-14	64,46462	30	-5,13012E-12
22	67,60334	3	1,35308E-15	67,60334	3	9,14824E-14	67,60334	30	-4,63274E-12
23	70,74232	3	-6,35603E-15	70,74232	3	-4,49418E-13	70,74232	29	3,12639E-12
24	73,88152	3	3,38618E-15	73,88152	3	2,50466E-13	73,88152	29	-2,75691E-12
25	77,02091	3	9,15934E-16	77,02091	3	7,01661E-14	77,02091	29	-6,66489E-12
26	80,16047	3	-5,86337E-15	80,16047	3	-4,69846E-13	80,16047	29	4,80327E-12
27	83,30019	3	9,99201E-16	83,30019	3	8,30447E-14	83,30019	29	-7,64544E-12
28	86,44004	3	1,19349E-15	86,44004	3	1,03473E-13	86,44004	29	-7,84439E-12
29	89,58001	3	-2,27596E-15	89,58001	3	-2,03393E-13	89,58001	29	1,31735E-11
30	92,72010	3	4,38538E-15	92,72010	3	4,06342E-13	92,72010	29	-2,18847E-12
31	95,86028	3	-3,54577E-15	95,86028	3	-3,40172E-13	95,86028	28	1,21645E-11
32	99,00055	3	4,76702E-15	99,00055	3	4,71623E-13	99,00055	28	-1,56319E-12
33	102,14090	3	-5,42622E-15	102,14090	3	-5,54223E-13	102,14090	28	8,89600E-12
34	105,28133	3	3,89272E-15	105,28133	3	4,09894E-13	105,28133	28	-4,16378E-12
35	108,42182	3	-4,52416E-15	108,42182	3	-4,90274E-13	108,42182	28	1,26903E-11
36	111,56238	3	-6,52950E-15	111,56238	3	-7,28306E-13	111,56238	28	7,17648E-12
37	114,70299	3	-6,33521E-15	114,70299	3	-7,26530E-13	114,70299	28	8,22808E-12
38	117,84365	3	-3,30985E-15	117,84365	3	-3,89910E-13	117,84365	28	1,91704E-11
39	120,98437	3	6,64052E-15	120,98437	3	8,03357E-13	120,98437	28	4,56168E-12
40	124,12512	3	-5,73847E-15	124,12512	3	-7,12319E-13	124,12512	28	1,19229E-11

21. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 10$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	2,83630	6	1,77636E-15	2,83630	37	5,32907E-15	2,83630	5	8,88178E-16
2	5,71725	8	-1,11022E-15	5,71725	36	-5,32907E-15	5,71725	5	-4,44089E-15
3	8,65870	7	-1,42109E-14	8,65870	7	-1,42109E-14	8,65870	4	-1,42109E-14
4	11,65321	6	8,88178E-16	11,65321	6	1,06581E-14	11,65321	5	1,24345E-14
5	14,68694	5	3,33067E-15	14,68694	5	-2,48690E-14	14,68694	6	1,77636E-14
6	17,74807	5	2,10942E-15	17,74807	5	3,73035E-14	17,74807	7	-7,10543E-15
7	20,82823	5	-4,82947E-15	20,82823	5	-1,01252E-13	20,82823	8	7,10543E-14
8	23,92179	5	5,82867E-15	23,92179	5	-5,68434E-14	23,92179	34	-2,13163E-14
9	27,02501	4	-6,66134E-16	27,02501	5	-1,95399E-14	27,02501	33	9,94760E-14
10	30,13535	4	4,44089E-16	30,13535	4	1,59872E-14	30,13535	33	-1,56319E-13
11	33,25106	4	3,88578E-16	33,25106	4	1,24345E-14	33,25106	33	2,70006E-13
12	36,37089	4	3,10862E-15	36,37089	4	1,13687E-13	36,37089	33	-3,90799E-13
13	39,49396	4	-3,58047E-15	39,49396	4	-1,42109E-13	39,49396	32	-3,05533E-13
14	42,61961	4	-1,11022E-16	42,61961	4	-5,32907E-15	42,61961	32	3,41061E-13
15	45,74735	4	1,11022E-15	45,74735	4	5,15143E-14	45,74735	32	6,75016E-13
16	48,87678	4	3,02536E-15	48,87678	4	1,49214E-13	48,87678	32	-6,75016E-13
17	52,00763	4	2,58127E-15	52,00763	4	1,33227E-13	52,00763	32	-9,02389E-13
18	55,13967	4	-2,49800E-16	55,13967	4	-1,42109E-14	55,13967	31	5,04485E-13
19	58,27270	4	-2,96985E-15	58,27270	4	-1,74083E-13	58,27270	31	-4,61853E-13
20	61,40658	4	-2,63678E-15	61,40658	4	-1,61648E-13	61,40658	31	-3,69482E-13
21	64,54120	4	1,19349E-15	64,54120	4	7,81597E-14	64,54120	31	-1,98952E-12
22	67,67645	4	-2,88658E-15	67,67645	4	-1,95399E-13	67,67645	31	3,11218E-12
23	70,81225	4	-5,88418E-15	70,81225	4	-4,17444E-13	70,81225	31	1,71951E-12
24	73,94854	4	-7,63278E-16	73,94854	4	-5,68434E-14	73,94854	31	-3,78009E-12
25	77,08525	4	-6,98053E-15	77,08525	4	-5,38236E-13	77,08525	30	1,30740E-12
26	80,22233	4	-3,42781E-15	80,22233	4	-2,75335E-13	80,22233	30	3,93641E-12
27	83,35975	4	-5,48173E-15	83,35975	4	-4,58300E-13	83,35975	30	2,67164E-12
28	86,49747	4	5,28744E-15	86,49747	4	4,56524E-13	86,49747	30	-1,13687E-13
29	89,63546	4	-4,64906E-15	89,63546	4	-4,15668E-13	89,63546	30	3,82272E-12
30	92,77369	3	2,17881E-15	92,77369	4	2,02505E-13	92,77369	30	-3,12639E-12
31	95,91214	3	4,13558E-15	95,91214	4	3,96128E-13	95,91214	30	-1,33582E-12
32	99,05078	3	3,52496E-15	99,05078	4	3,48166E-13	99,05078	30	-2,08900E-12
33	102,18961	3	-2,49800E-16	102,18961	3	-2,66454E-14	102,18961	30	-6,59384E-12
34	105,32859	3	6,39766E-15	105,32859	3	6,75016E-13	105,32859	29	1,19371E-12
35	108,46773	3	2,62290E-15	108,46773	3	2,84217E-13	108,46773	29	-3,66640E-12
36	111,60701	3	-2,35922E-15	111,60701	3	-2,62901E-13	111,60701	29	9,03810E-12
37	114,74641	3	6,49480E-15	114,74641	3	7,44294E-13	114,74641	29	1,56319E-12
38	117,88592	3	7,10543E-15	117,88592	3	8,38440E-13	117,88592	29	2,60059E-12
39	121,02555	3	5,62050E-15	121,02555	3	6,80345E-13	121,02555	29	3,41061E-13
40	124,16527	3	2,24820E-15	124,16527	3	2,78888E-13	124,16527	29	-5,41434E-12

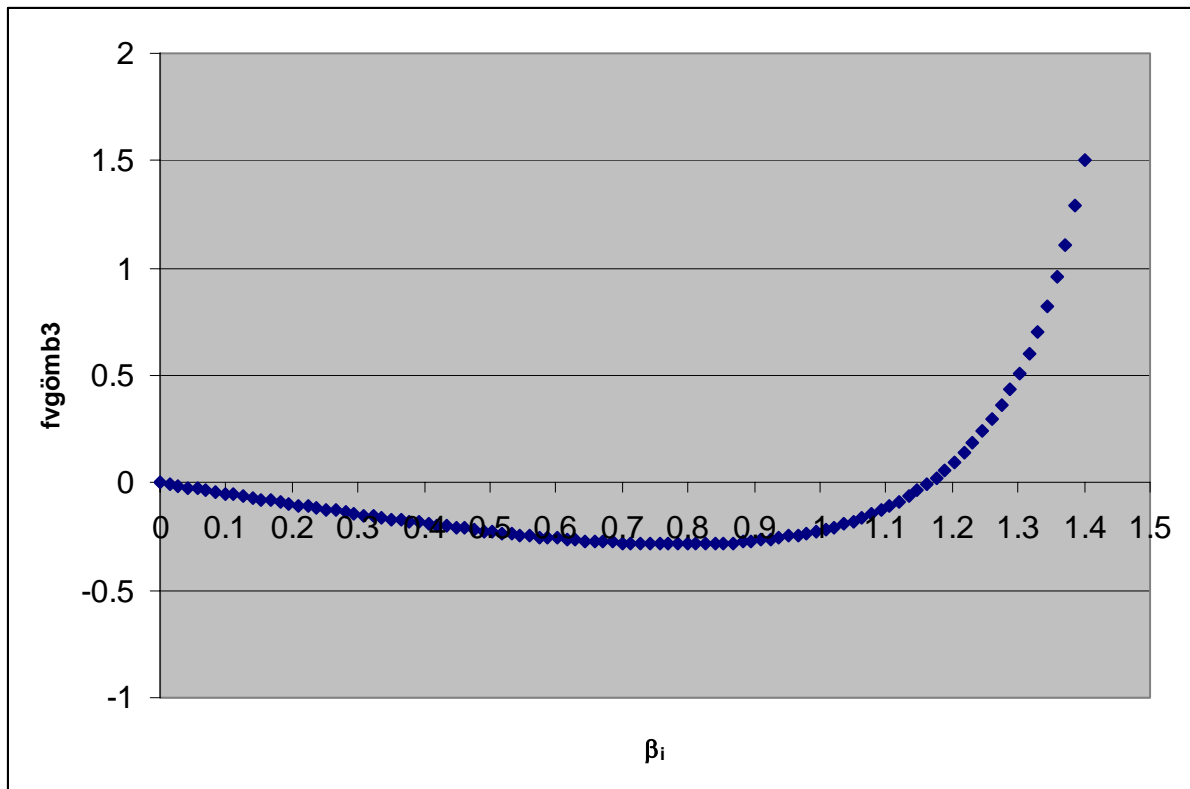
22. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 50$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	3,07884	6	1,54543E-13	3,07884	34	4,83169E-13	3,07884	5	4,88498E-15
2	6,15816	34	0,00000E+00	6,15816	34	0,00000E+00	6,15816	5	-2,66454E-15
3	9,23843	34	-1,84741E-13	9,23843	34	-1,84741E-13	9,23843	5	-3,73035E-14
4	12,32005	34	-7,99361E-15	12,32005	34	-9,94760E-14	12,32005	5	-2,84217E-14
5	15,40339	34	8,88178E-16	15,40339	34	1,42109E-14	15,40339	5	0,00000E+00
6	18,48875	34	-5,32907E-15	18,48875	34	-9,23706E-14	18,48875	5	6,39488E-14
7	21,57636	34	-1,50990E-14	21,57636	34	6,25278E-13	21,57636	5	-4,26326E-14
8	24,66638	34	-9,76996E-15	24,66638	34	-2,41585E-13	24,66638	5	-1,42109E-14
9	27,75890	34	-1,11022E-15	27,75890	34	-2,84217E-14	27,75890	5	9,59233E-14
10	30,85397	12	-6,66134E-15	30,85397	34	5,68434E-13	30,85397	5	-1,42109E-14
11	33,95158	8	7,54952E-15	33,95158	9	2,55795E-13	33,95158	5	-2,20268E-13
12	37,05168	8	-1,33227E-15	37,05168	8	-4,97380E-14	37,05168	5	9,23706E-14
13	40,15420	7	-8,21565E-15	40,15420	7	-3,33955E-13	40,15420	4	-1,27898E-13
14	43,25905	7	5,10703E-15	43,25905	7	2,20268E-13	43,25905	4	-2,84217E-13
15	46,36610	6	-1,77636E-15	46,36610	6	-8,52651E-14	46,36610	4	7,81597E-14
16	49,47526	6	-1,11022E-16	49,47526	6	-7,10543E-15	49,47526	3	1,70530E-13
17	52,58639	6	5,88418E-15	52,58639	6	3,05533E-13	52,58639	4	-2,41585E-13
18	55,69937	6	1,22125E-15	55,69937	6	7,10543E-14	55,69937	4	2,70006E-13
19	58,81408	6	9,99201E-16	58,81408	6	5,68434E-14	58,81408	5	2,77112E-13
20	61,93042	6	4,66294E-15	61,93042	6	2,84217E-13	61,93042	5	-3,33955E-13
21	65,04825	5	5,66214E-15	65,04825	6	3,69482E-13	65,04825	5	-2,41585E-13
22	68,16749	5	5,32907E-15	68,16749	5	3,69482E-13	68,16749	5	-2,70006E-13
23	71,28802	5	6,77236E-15	71,28802	5	4,83169E-13	71,28802	5	-1,13687E-13
24	74,40977	5	3,77476E-15	74,40977	5	2,77112E-13	74,40977	5	-4,40536E-13
25	77,53263	5	2,77556E-15	77,53263	5	2,20268E-13	77,53263	6	-5,82645E-13
26	80,65654	5	-8,88178E-16	80,65654	5	-7,10543E-14	80,65654	6	-1,09424E-12
27	83,78141	5	-8,21565E-15	83,78141	5	-6,82121E-13	83,78141	6	5,40012E-13
28	86,90719	5	9,99201E-16	86,90719	5	8,52651E-14	86,90719	6	-9,37916E-13
29	90,03380	5	-5,99520E-15	90,03380	5	-5,40012E-13	90,03380	6	9,23706E-13
30	93,16119	5	-6,77236E-15	93,16119	5	-6,32383E-13	93,16119	6	8,10019E-13
31	96,28930	5	8,88178E-16	96,28930	5	8,52651E-14	96,28930	7	-1,12266E-12
32	99,41809	5	2,22045E-15	99,41809	5	2,20268E-13	99,41809	7	-9,23706E-13
33	102,54751	5	1,27676E-15	102,54751	5	1,35003E-13	102,54751	7	-1,15108E-12
34	105,67752	5	-4,27436E-15	105,67752	5	-4,47642E-13	105,67752	7	1,47793E-12
35	108,80808	5	5,05151E-15	108,80808	5	5,54223E-13	108,80808	7	-3,41061E-13
36	111,93915	5	6,77236E-15	111,93915	5	7,60281E-13	111,93915	8	8,52651E-14
37	115,07070	5	-5,60663E-15	115,07070	5	-6,39488E-13	115,07070	8	1,30740E-12
38	118,20270	5	6,16174E-15	118,20270	5	7,24754E-13	118,20270	9	-4,26326E-14
39	121,33513	4	-4,82947E-15	121,33513	5	-5,82645E-13	121,33513	9	1,66267E-12
40	124,46795	4	1,11022E-16	124,46795	4	1,42109E-14	124,46795	11	-1,93268E-12

23. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 100$ esetén

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	3,11019	6	-1,13687E-13	3,11019	33	-3,55271E-13	3,11019	5	-1,73195E-14
2	6,22044	33	5,32907E-14	6,22044	33	3,26850E-13	6,22044	5	1,42109E-14
3	9,33081	33	-7,95808E-13	9,33081	33	-7,95808E-13	9,33081	5	-7,99361E-14
4	12,44136	33	-3,37508E-14	12,44136	33	-4,26326E-13	12,44136	5	-6,03961E-14
5	15,55214	33	-2,22045E-14	15,55214	33	-3,55271E-13	15,55214	5	-5,86198E-14
6	18,66323	33	9,14824E-14	18,66323	33	-2,17426E-12	18,66323	5	1,35003E-13
7	21,77465	33	8,88178E-16	21,77465	33	1,42109E-14	21,77465	5	1,84741E-13
8	24,88647	33	6,57252E-14	24,88647	33	1,63425E-12	24,88647	5	-1,59872E-13
9	27,99872	33	4,48530E-14	27,99872	33	1,26477E-12	27,99872	5	1,56319E-13
10	31,11144	33	2,17604E-14	31,11144	33	-1,80478E-12	31,11144	5	1,42109E-14
11	34,22468	33	-1,82077E-14	34,22468	33	-6,25278E-13	34,22468	5	-2,84217E-14
12	37,33845	33	7,99361E-15	37,33845	33	2,98428E-13	37,33845	5	3,12639E-13
13	40,45279	33	-1,77636E-15	40,45279	33	-7,10543E-14	40,45279	5	1,70530E-13
14	43,56772	33	1,77636E-15	43,56772	33	8,52651E-14	43,56772	5	2,41585E-13
15	46,68326	33	1,33227E-14	46,68326	33	6,25278E-13	46,68326	5	-3,62377E-13
16	49,79942	33	-1,39888E-14	49,79942	33	-6,96332E-13	49,79942	5	-1,42109E-13
17	52,91620	33	-8,88178E-15	52,91620	33	-4,68958E-13	52,91620	5	-3,55271E-14
18	56,03363	33	6,43929E-15	56,03363	33	3,69482E-13	56,03363	5	4,33431E-13
19	59,15169	33	1,22125E-14	59,15169	33	7,10543E-13	59,15169	5	-3,12639E-13
20	62,27039	33	-9,54792E-15	62,27039	33	-5,96856E-13	62,27039	5	-1,35003E-13
21	65,38972	10	-2,28706E-14	65,38972	11	-1,50635E-12	65,38972	5	2,70006E-13
22	68,50969	9	-1,50990E-14	68,50969	9	-1,03739E-12	68,50969	5	5,82645E-13
23	71,63028	8	-1,57652E-14	71,63028	8	-1,12266E-12	71,63028	5	5,40012E-13
24	74,75149	8	-6,21725E-15	74,75149	8	-4,54747E-13	74,75149	5	1,03739E-12
25	77,87330	7	-8,43769E-15	77,87330	7	-6,53699E-13	77,87330	5	9,09495E-13
26	80,99571	7	-3,55271E-15	80,99571	7	-2,84217E-13	80,99571	4	-1,13687E-12
27	84,11869	7	-1,13243E-14	84,11869	7	-9,66338E-13	84,11869	4	6,96332E-13
28	87,24224	7	1,48770E-14	87,24224	7	1,29319E-12	87,24224	4	1,98952E-13
29	90,36635	6	3,55271E-15	90,36635	7	3,12639E-13	90,36635	4	-6,96332E-13
30	93,49099	6	1,46549E-14	93,49099	6	1,36424E-12	93,49099	4	2,70006E-13
31	96,61616	6	1,26565E-14	96,61616	6	1,22213E-12	96,61616	4	1,42109E-13
32	99,74183	6	-1,22125E-15	99,74183	6	-1,13687E-13	99,74183	3	-1,19371E-12
33	102,86800	6	-3,21965E-15	102,86800	6	-3,26850E-13	102,86800	4	-1,43530E-12
34	105,99464	6	1,02141E-14	105,99464	6	1,08002E-12	105,99464	4	1,42109E-14
35	109,12175	6	-5,21805E-15	109,12175	6	-5,68434E-13	109,12175	4	1,33582E-12
36	112,24930	6	-5,66214E-15	112,24930	6	-6,39488E-13	112,24930	4	1,26477E-12
37	115,37728	6	1,02141E-14	115,37728	6	1,17950E-12	115,37728	4	1,13687E-13
38	118,50568	6	-5,88418E-15	118,50568	6	-6,96332E-13	118,50568	4	1,29319E-12
39	121,63448	6	6,66134E-15	121,63448	6	8,10019E-13	121,63448	5	-3,41061E-13
40	124,76367	6	7,77156E-15	124,76367	6	9,80549E-13	124,76367	5	-1,42109E-13

Érdekes eredményt mutat a 18. táblázat, ugyanis $B_i = 0,5$ esetén a fvgömb3 függvény teljesen használhatatlan eredményt adott. Ennek magyarázata, hogy a $fvgömb3 = (1 - B_i) \cdot tg(\beta_i) - \beta_i$ függvénynek $B_i < 1$ esetén minimuma van a zérus hely előtt (6. ábra), így a Newton algoritmus a másik irányba tévedett rossz gyököket találva.



6. ábra A fvgömb3 függvény minimuma a zérus hely előtt $B_i < 1$ esetén

A módosított program által szolgáltatott eredmények már megfelelőek (24. táblázat).

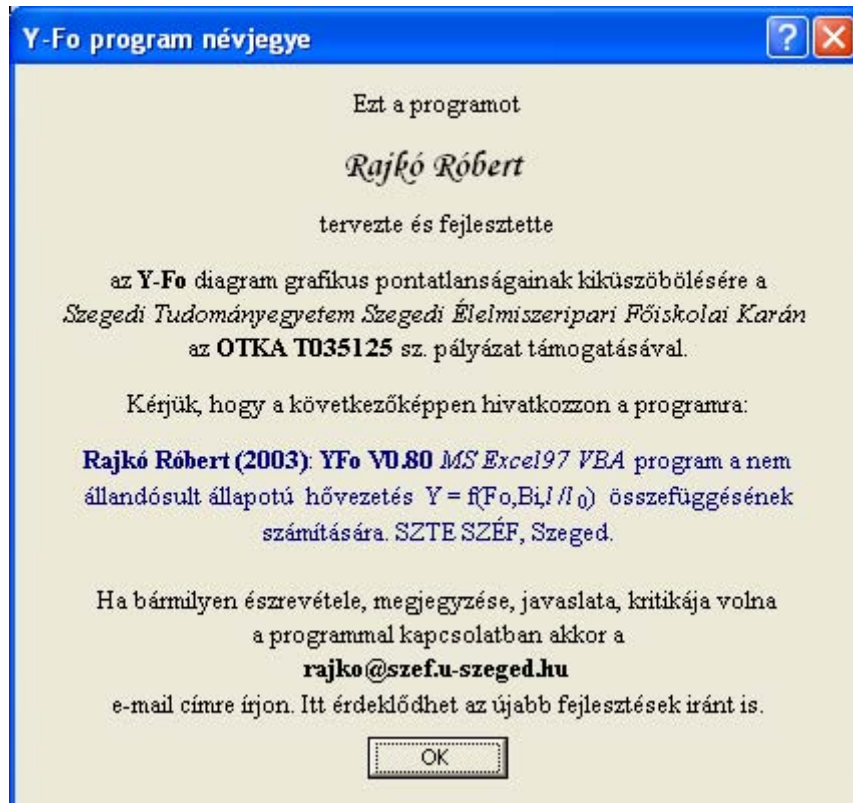
24. táblázat Gyökök értékei, a számításhoz szükséges idő és a függvényértékek $B_i = 0,5$ esetén (a módosított programmal számolva, vedd össze 18. táblázattal)

l	fvgömb1			fvgömb2			fvgömb3		
	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$	β_i	idő	$f(\beta_i)$
1	1,16556	4	-1,66533E-16	1,16556	5	-3,33067E-16	1,16556	4	2,22045E-16
2	4,60422	4	-2,91434E-16	4,60422	4	-1,33227E-15	4,60422	35	1,50990E-14
3	7,78988	4	-7,21645E-15	7,78988	4	-7,21645E-15	7,78988	33	1,24345E-14
4	10,94994	3	-2,49800E-16	10,94994	4	-2,77556E-15	10,94994	32	7,46070E-14
5	14,10173	3	2,08167E-16	14,10173	3	2,99760E-15	14,10173	31	-5,86198E-14
6	17,24978	3	-1,04083E-16	17,24978	3	-1,94289E-15	17,24978	31	-9,55680E-13
7	20,39584	3	2,14759E-15	20,39584	3	-1,01086E-13	20,39584	30	-2,59348E-13
8	23,54071	3	7,91034E-16	23,54071	3	1,85407E-14	23,54071	30	1,16174E-12
9	26,68480	3	2,04697E-16	26,68480	3	5,55112E-15	26,68480	29	2,32347E-12
10	29,82837	3	3,62557E-15	29,82837	3	-1,03806E-13	29,82837	29	3,13705E-12
11	32,97156	3	-3,29251E-15	32,97156	3	-1,08580E-13	32,97156	29	3,43192E-12
12	36,11447	3	-5,13478E-16	36,11447	3	-1,85962E-14	36,11447	28	-3,13349E-12
13	39,25717	3	-2,67147E-16	39,25717	3	-1,04916E-14	39,25717	28	-4,46221E-12
14	42,39971	3	3,22312E-15	42,39971	3	1,36668E-13	42,39971	28	7,79465E-12
15	45,54212	3	3,21965E-15	45,54212	3	1,46549E-13	45,54212	28	9,00258E-12
16	48,68442	3	-3,45730E-15	48,68442	3	-1,68310E-13	48,68442	27	8,24940E-12
17	51,82663	3	3,40179E-15	51,82663	3	1,76303E-13	51,82663	27	1,06866E-11
18	54,96878	3	1,48839E-15	54,96878	3	8,18234E-14	54,96878	27	-1,93552E-11
19	58,11086	3	3,04617E-15	58,11086	3	1,76970E-13	58,11086	27	1,58238E-11
20	61,25289	3	3,50241E-15	61,25289	3	2,14606E-13	61,25289	27	1,41611E-11
21	64,39488	3	-6,94497E-15	64,39488	3	-4,47198E-13	64,39488	27	-1,55467E-11
22	67,53684	3	-4,62130E-15	67,53684	3	-3,12084E-13	67,53684	26	-3,82983E-11
23	70,67876	3	-6,93976E-15	70,67876	3	-4,90497E-13	70,67876	26	-1,87867E-11
24	73,82065	3	6,65960E-15	73,82065	3	4,91607E-13	73,82065	26	-1,38272E-11
25	76,96252	3	-4,56666E-15	76,96252	3	-3,51497E-13	76,96252	26	-5,03775E-11
26	80,10437	3	-5,81479E-15	80,10437	3	-4,65794E-13	80,10437	26	-3,85683E-11
27	83,24620	3	-5,81219E-15	83,24620	3	-4,83835E-13	83,24620	26	-4,16946E-11
28	86,38801	3	3,11470E-15	86,38801	3	2,69118E-13	86,38801	26	3,39639E-11
29	89,52981	3	-6,62751E-15	89,52981	3	-5,93359E-13	89,52981	26	-3,51577E-11
30	92,67159	3	-1,18308E-15	92,67159	3	-1,09690E-13	92,67159	26	1,12905E-10
31	95,81336	3	-4,17114E-15	95,81336	3	-3,99680E-13	95,81336	25	-8,53504E-11
32	98,95512	3	-5,28657E-15	98,95512	3	-5,23137E-13	98,95512	25	-6,92069E-11
33	102,09686	3	-2,27249E-15	102,09686	3	-2,32037E-13	102,09686	26	-1,36495E-10
34	105,23860	3	8,30065E-16	105,23860	3	8,73746E-14	105,23860	26	1,00997E-10
35	108,38033	3	-9,73180E-16	108,38033	3	-1,05471E-13	108,38033	26	1,49484E-10
36	111,52206	3	-7,48533E-16	111,52206	3	-8,34888E-14	111,52206	26	1,52710E-10
37	114,66377	3	5,42968E-16	114,66377	3	6,22835E-14	114,66377	26	1,27457E-10
38	117,80548	3	-5,73673E-15	117,80548	3	-6,75848E-13	117,80548	25	-8,55920E-11
39	120,94718	3	-3,35669E-16	120,94718	3	-4,05787E-14	120,94718	26	1,67518E-10
40	124,08888	3	-1,39559E-15	124,08888	3	-1,73195E-13	124,08888	26	2,08971E-10

A program felépítése és használata

A programot MS EXCEL VBA makró nyelven fejlesztettük, mivel a Visual Basic programnyelv könnyen elsajátítható és az Excel nyújtotta fejlesztői környezet felhasználóbarát felület kialakítását teszi lehetővé (KOVALCSIK 2000).

A program beolvasása után üdvözlí a felhasználót (7. ábra).



7. ábra A program üdvözlő képernyője

Ezután a program egy új menüpontot helyez el a fő menüsorban „Y-Fo” névvel. Rákattintva (vagy Alt + Y billentyűkombinációt lenyomva) az almenüpontok érhetők el: „Indítás” és „Kilépés”. Az „Indítás” almenüpontra kattintva (vagy Alt + I billentyűkombinációt lenyomva) elindíthatjuk a programot és megjelenik az adatbeviteli modul (8. ábra).

A beviteli felületet úgy alakítottuk ki, hogy azt a mezőt kell kitöltetlenül hagyni, amelyikhez tartozó fizikai mennyiséget számolni szeretnénk. A „Számolás” feliratú gomb megnyomásával a program kiszámolja és megjeleníti az eredményt. Újabb számolás előtt az adatokat módosítani kell, majd annak a mezőnek a tartalmát kitörölni amelyiket szeretnénk újraszámolni.

8. ábra Az adatbeviteli modul

Köszönetnyilvánítás

Jelen munkát az OTKA T035125 és T037480 számú pályázata támogatta.

Irodalom

ABRAMOWITZ, M. and I.A. STEGUN (1972): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York.

KOVALCSIK Géza (2000): *Excel 97 programozása*. ComputerBooks Kiadó, Budapest.

RAJKÓ, R. (2000): Spreadsheet applications in chemistry using Microsoft® Excel® by D. Diamond and V.C.A. Hanratty. Book review. *Journal of Chemometrics*, 14, 41-43.

VALKÓ Péter és VAJDA Sándor (1987): *Műszaki-tudományos feladatok megoldása személyi számítógéppel*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

WONG, H.Y. (1983): *Hőátadási zsebkönyv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.