

# A MATEMATIKAI NEVELÉS KUTATÁSÁNAK AKTUÁLIS IRÁNYZATAI

## RECENT TRENDS OF RESEARCH ON MATHEMATICS EDUCATION

Csikos Csaba<sup>1</sup>, Pásztor Attila<sup>2</sup>, Rausch Attila<sup>3</sup>, Szitányi Judit<sup>4</sup>

<sup>1</sup>DSc, Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematika Tanszék, Budapest  
csikos.csaba@tok.elte.hu

<sup>2</sup>PhD, MTA–SZTE Képességfejlesztés Kutatócsoport, Szeged

<sup>3</sup>PhD, Eötvös Loránd Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet, Budapest

<sup>4</sup>PhD, Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematika Tanszék, Budapest

### ÖSSZEFOGLALÁS

Tanulmányunkban a matematikai nevelés (mathematics education) területén az utóbbi évtizedben meghatározó kutatási tendenciákkal foglalkozunk. A fő témaköröket az Európai Bizottság 2011-ben kiadott *Mathematics Education in Europe: Common Practices and Challenges* dokumentuma alapján jelöltük ki, majd elsősorban a vezető matematikadidaktikai folyóiratok (*Journal for Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *ZDM*, *Journal of Mathematical Behavior*) legtöbbször hivatkozott írásai, valamint a hazai szerzők nemzetközi trendekhez kapcsolódó publikációi alapján végeztük el az áttekintést. Az elemzések alapján megállapítható, hogy a terület kutatói egyre többen foglalkoznak társadalmi rendszerek kontextusába ágyazottan a matematikai nevelés kérdéseivel. A matematikaoktatás örökzöldnek tekinthető területei közül a számolási készséget, a vizualizálást, az értékelés problémáit és a matematika-tanulás affektív feltételeit övezi kiemelt figyelem. A pedagógusok matematikai nézeteivel és tudáselemeivel ugyancsak számos vizsgálat foglalkozik.

### ABSTRACT

This study focuses on current research on mathematics education. The leading foci of the study are set by the European Commission document entitled *Mathematics Education in Europe: Common Practices and Challenges*, and the review primarily relies on most frequently cited articles of four leading journals: *Journal for Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *ZDM*, *Journal of Mathematical Behavior*, and on Hungarian publications embedded in the mainstream of international research. Based on our review, more and more studies address the issues of mathematical education in the context of societal systems. Among the classic topics of mathematics instruction, special emphasis has been put on arithmetic skills, visualization, problems of assessment, and on the affective preconditions of mathematics learning. Special attention has also been paid to research on the views and knowledge of mathematics educators.

**Kulcsszavak:** matematikai nevelés, számolási készségek, affektív feltételek, meggyőződések

**Keywords:** mathematics education, counting skills, affective conditions, beliefs

## A MATEMATIKAI NEVELÉS TÁRSADALMI MEGHATÁROZOTTSÁGA

A matematika évezredek óta fontos szerepet tölt be a felnövekvő generációk képzésében. Az intézményes nevelés korai évszázadai során a hét szabad művészet részeként az aritmetika és a geometria már megjelent a képzés jól körülhatárolt ismeretanyagaként, a jezsuita világtanterv, a *Ratio Studiorum* (1599) óta pedig lényegében iskolai tantárgyként tekinthetünk a matematikára. A matematika tantárgy társadalmi jelentőségének bemutatására több elméleti elemzés is vállalkozott, az empirikus kutatások között egy hazai, kisgyermekes szülők nézeteinek vizsgálatára összpontosító vizsgálat (Berze–Csíkos, 2017) igazolta a matematika tantárgy kitüntetett szerepét.

Hazánkban különösen nagy figyelmet kap a matematikai nevelés. Számos nemzetközi jelentőségű matematikus (Pólya György, Erdős Pál, Dienes Zoltán, Péter Rózsa, Rényi Alfréd, Varga Tamás) matematikai kutatásaik mellett fontosnak tartották a tudás átadásának kérdését. Napjainkban a Magyar Tudományos Akadémia számos fóruma foglalkozik a matematikaoktatás helyzetével és a fejlesztés lehetőségeivel, kiemelkedő szerepe van a Matematikai Közoktatási Munkabizottságnak és az MTA Tantárgy-pedagógiai Kutatási Program keretében támogatott kutatócsoportoknak. A matematikatudomány és a matematika tantárgy jelentőségéhez mérten a matematikai nevelés hazai kutatása igen jelentős fejlődési tartalmakkal rendelkezik.

A matematikai nevelés társadalmi meghatározottságát az írott dokumentumok közül elsősorban a tantervek és a taneszközök közvetítik. Az 1978-as előíró tanterv nyomdokain a nemzeti alaptantervek generációi két jelentős újdonságot hoztak. Összhangban a nemzetközi tantervfejlesztési trendekkel, a magyar matematika alaptanterv mindhárom iskolai szinten leírja a matematikai gondolkodás legfontosabb elemeit, az alapvető készségek és eljárások, a matematikai megértés, a matematikai fogalmak és elvek fejlesztésének/fejlődésének folyamatát. Hangsúlyt helyez a matematika valós életben való alkalmazására, a kommunikáció és az érvelés fejlesztésére. Másrészt a nagyvilágban gyakran „magyar tudományterületként” emlegetett kombinatorika hangsúllyal jelent meg a „Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok” nevű kerettantervi területben. Ugyanakkor a köznevelés szerves részeként megjelenő óvodai alapprogramban a matematikai nevelés részletezettsége és hangsúlya csekély.

A 2011-es TIMSS-felmérés alapján az alsó tagozaton oktató pedagógusok több mint 90%-a alapvető forrásként használja a tankönyveket, így különös jelentősége van annak, hogy az új generációs tankönyveink számos olyan feladatot tartalmaznak, amelyek a tágabb értelemben vett gondolkodásfejlesztés eszközei, és emellett tudatosan igyekeznek a matematika iránti pozitív viszonyulást megteremteni és megőrizni. Emellett a tankönyveket kísérő módszertani kézikönyvek friss kutatási eredmények közvetítésére is vállalkoznak.

A matematikai nevelés hazai helyzetét út- és egyensúlykeresés jellemzi a „matematikai színvonal” megtartásának Szküllája és „a matematika mindenkié” Varga Tamás-i szlogen követésének Kharübdiszé között. Ami a kérdés gyakorlati oldalát illeti, egyre több matematikatanár látja abban a siker mércéjét, hogy tudja-e csökkenteni a tanulók közötti teljesítményszakadékokat.

## OKTATÁSI MÓDSZEREK

Az oktatási módszerek kutatásának területe természetesen összefügg a további témakörökkel, hiszen a pedagógusképzés, az értékelés és a felzárkóztatás kérdései egyben oktatásmódszertani kérdések is. A gondolkodásfejlesztést előtérbe helyező módszertani elgondolások között a vizualizálás szerepének kutatása jelentős erővel folyik. A külső képek és a belső, mentális képek viszonya és ezek jelentősége a matematikai gondolkodásban számtalan téren napvilágra került. A kisgyermekkortól (Csíkos et al., 2012) a középiskolás korosztályon keresztül a felsőoktatásig (Moore–Carlson, 2012) élenkülő empirikus kutatások vannak világszerte. A vizualitás szerepe iránti érdeklődés egyrészt az „ikonográfiai fordulatnak” tudható be, de kultúráközi összehasonlító vizsgálatok (különösen a kínai–nyugati összehasonlítások) eredőjének is tekinthető. A vizualitás területéhez szervesen kötődik a matematikadidaktikai vizsgálatokban újra középpontba kerülő geometriai tudás (Gal–Linchevski, 2010). A GeoGebra és más dinamikus oktató szoftverek új lendületet adtak a kutatásoknak a térbeli képességek fejlesztése terén. Napjainkban számos kutatási program foglalkozik a digitális eszközök egyre szélesebb körű elterjedése által indukált gondolkodási formák változásával, a különböző generációk tanulási szokásainak változásával. Ugyanakkor a Jean Piaget által meghatározott fejlődési szakaszok még napjainkban is gyakran hivatkoztak a matematikadidaktikai kutatásokban.

A számolás területén a laboratóriumi precizitású pszichológiai vizsgálatoktól (például *spontaneous focusing on numerosity* – spontán odafigyelés a számosság-ra) a számolási készség fejlesztésére vonatkozó pedagógiai környezet feltárásáig (*adaptive strategy use in calculation* – adaptív stratégiahasználat a számolásban) terjednek a kutatások. Az orvostudomány határterületeként a diszkalkulia empirikus vizsgálata is jelentős erővel folyik.

A harmadik, az utóbbi évtizedben revitalizálódott kutatási terület a matematikai definíciókhoz és bizonyításokhoz szükséges mentális feltételek és oktatási módszerek kérdése. Matthew Inglis és Lara Alcock (2012) vizsgálatában a matematikát tanuló hallgatók és a matematikusok bizonyításolvasását szemmozgás-vizsgálattal hasonlították össze.

A matematika különféle tartalmi részterületeit egyaránt átfogó, innovatív oktatási megközelítésmódok közül a kutatásalapú vagy problémaalapú mate-

matikatanulást emeljük ki (Artigue–Blomhøj, 2013). A kutatásalapú oktatásnak számos válfaja létezik, és a köztük lévő különbségek olyan – egymással is összefonódó – aspektusokból szemlélhetők, mint például az alkalmazott feladatok autentikussága, az osztálytermi légkör demokratizmusa, a tanár-diák interakciók jellege vagy a problémamegoldó gondolkodás szolgálatába állított extrakurrikuláris tartalmak. A kutatásalapú oktatás jellemzői szorosan összefüggnek a matematikatanulás affektív feltételeinek alakításával: a motiváció, a célkitűzés, a kreativitás és a játék(osítás) matematikadidaktikai leírása a kutatások főáramába került.

### MÉRÉS-ÉRTÉKELÉS: A BIZONYÍTÉKON ALAPULÓ OKTATÁSPOLITIKÁTÓL A SZEMÉLYRE SZABOTT TANÍTÁSIG

A közoktatás minden szintjét és szereplőjét komplex rendszerek együttműködésékként is értelmezhetjük. E komplex rendszerek együttműködésében a mérés-értékelés funkciója az, hogy a pedagógiai folyamatok tervezéséhez és irányításához hatékony és adekvát visszacsatolási köröket biztosítson. A folyamatmodell első lépéseként a mérések alkalmazásával információt gyűjtünk, amely alapján meghatározhatók a célok, ezt követően megtervezhetők a beavatkozások, majd a megvalósítást követően az ismételt mérések révén a kezdeti adatokhoz viszonyítva képet kaphatunk az intervenciók hatékonyságáról, a szükséges korrekciókról (Pásztor, 2017).

Az oktatási rendszer szintjén visszacsatolási kört valósítanak meg a nemzetközi és nagymintás felmérések, mint a PISA (Program for International Student Assessment) és a TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), míg a nemzeti értékelési programok, mint nálunk az Országos Kompetenciamérések elsősorban az intézmények (iskolák) számára nyújtanak visszacsatolást. A rendszerszintű felmérések céljait és tartalmait bemutató írásművek tanulmányozása rávilágít arra, hogy a matematikatanulási vizsgálatok fókuszában egyre nagyobb hangsúlyt kap a tudás alkalmazásának és a gondolkodási képességek fejlettségének mérése.

A PISA, a TIMSS és az Országos Kompetenciamérések eredményei hasznosak lehetnek a közép- vagy a hosszú távú tervezéshez, ugyanakkor az akár egyéves visszacsatolási idő miatt az osztálytermi, illetve a tanulói szintű beavatkozásokhoz korlátozottan járulhatnak hozzá. A mindennapi tanítási folyamatokhoz, a differenciált, személyre szóló fejlesztéshez gyors és megbízható visszacsatolás szükséges, melyet a szakirodalom által formatívnek és/vagy diagnosztikusnak nevezett értékelési funkciók valósítanak meg. Ilyen visszacsatolási körök a tanórai kvízek, dolgozatok, tesztek felvétele vagy a szóbeli feleltetés, illetve a tanítás során a tanári kérdések vagy a diákok egymáshoz intézett kérdései is.

A formatív értékelés megfelelő alkalmazása növelheti a matematikaoktatás hatékonyságát, az elmúlt években ezen értékelési forma technológiával támogatott megvalósítási lehetőségei álltak több kutatás középpontjában. Az értékelés automatizálásán keresztül az azonnali visszacsatolás mellett az adaptivitás, idő és erőforrások megspórolása is motiválja a tanárokat a technológiaalapú értékelési eszközök használatára, továbbá ezek az értékelési mechanizmusok köszönnek vissza az egyre nagyobb népszerűségnek örvendő játékosítás (gamification) alapelemei között. A technológiai integráció a diagnosztikus értékelés terén is új lehetőségeket nyitott, segítségével gyorsan és hatékonyan tudjuk azonosítani a lemaradásban lévő tanulókat (Molnár–Csapó, 2019). A szakirodalom ugyanakkor egyértelműen rámutat arra is, hogy a személyre szabott értékeléshez és ennek a pedagógiai tervezéssel történő összekapcsolásához, ezek minél hatékonyabb együttes alkalmazásához a pedagógusok felkészítése is elengedhetetlen (Faber et al., 2017).

#### GYENGÉN TELJESÍTŐ ÉS LEMORZSOLÓDÓ TANULÓK AZ ISKOLÁBAN

A gyengén teljesítő tanulók arányának leszorítása és az iskolai lemorzsolódás csökkentése számos szervezet és ország célkitűzései között szerepel. Nemzetközi kitekintésben a kutatások elsősorban a PISA-eredményekből kiindulva foglalkoznak a matematikából gyengén teljesítő tanulókkal, arányuk a legtöbb országban az érdeklődés középpontjában áll. A magyarországi arány 28,0%, amely az EU 2020-as célkitűzéseitől messze elmarad. Ráadásul, míg az OECD-országokban összességében 1,3%-kal nőtt a gyengén teljesítők aránya a 2003-as PISA-méréshez képest, Magyarországon 5,0%-kal emelkedett ez az érték, miközben Lengyelországban 4,9%-kal csökkent (OECD, 2016).

A gyengén teljesítők felzárkóztatására való rendszerszintű törekvések között találkozhatunk tantervi reformokkal, pedagógiai asszisztensek, illetve kiscsoportos vagy egyéni fejlesztések alkalmazásával, valamint olyan országos felmérésekkel, amelyek segítik időben kiszűrni a lemaradásban lévőket, tanulási nehézségekkel küszködőket. A minél korábbi beavatkozás növeli a fejlesztőprogramok hatékonyságát, így az iskola kezdő szakaszában számos korai diagnosztikára és fejlesztőprogramra irányuló kutatással találkozhatunk (Molnár–Csapó, 2019). A korai fejlesztések eredményei régóta ismertek, az idősebb korosztályokban az újabb kutatási eredmények a változatos stratégiák együttes és változatos alkalmazását hangsúlyozzák: a matematikai alapfogalmak megértésének elősegítése, a pedagógus által keresett, kiválasztott, fejlesztett tananyagok használata, a közösségre, kollaborációra építő módszerek elterjesztése a tanórák alatt és azokon kívül (Prediger et al., 2018).

Az alacsony matematikai teljesítmény egyik lehetséges oka, a matematikai szorongás vizsgálata és annak csökkentésére irányuló programok fejlesztése különböző életkori csoportoknál évtizedek óta meghatározó kutatási irány (Dowker et al., 2016). A matematikai szorongás megelőzése, illetve csökkentése komoly odafigyelést és energiát igényel az oktatási intézményektől, pedagógusoktól, bár a körülmények mindenhol mások és mások, a hétköznapi példákon alapuló, játékosabb feladatok alkalmazása, a tanulók énképének alakítása, valamint barátságosabb tesztelési környezet segíthet a tanulóknak (Luttenberger et al., 2018).

### A MOTIVÁCIÓ ÉS MÁS AFFEKTÍV TERÜLETEK SZEREPE A MATEMATIKA TANULÁSÁBAN

A matematika tantárgyat a diákok általában nehéznek ítélik meg. Amennyiben megfelelő motivációs bázist kívánunk kialakítani a diákokban, a személyiség affektív szférájának számos összetevőjét szükséges figyelembe vennünk. A szakirodalom megkülönbözteti az intrinzik és az extrinzik motivációt, továbbá a területhez szorosan kapcsolódnak az attitűdök, a tanulási énkép, az énhatékonyság, az önszabályozás fogalmi, a matematikatanulás során fellépő szorongás érzése, valamint megkülönböztetünk elsajátítási és teljesítménymotivációt (Józsa–Fejes, 2012; Schukajlow et al., 2017).

A matematikatanulás affektív feltételeinek mérése megjelent a nemzetközi felmérésekben is, melynek eredményeképpen képet kaphatunk a magyar tanulók matematikai tanuláshoz kapcsolódó motívumairól. Az eredményekből többek között az derül ki, hogy a tizenöt éves magyar tanulók közel kétharmada (63,1%) nem érzi magát nagyon jó matematikai problémamegoldónak (OECD átlag = 57,8%), és egyharmaduk (35,3%) érez tehetetlenséget matematikai problémák megoldása közben (OECD átlag = 29,8%). A diákok 30,3%-a élvezzi a matematikatanulást (OECD átlag = 36,2%), és 27,5%-a várja a matematikaórát (OECD átlag = 38,1%). Mindemellett a tanulók 70,2%-a egyetért azzal, hogy a matematikaórán tanult ismeretek hozzásegíthetik ahhoz, hogy munkát találjon (OECD átlag = 70,5%).

A 2015-ben megvalósult TIMSS-mérés tanulságai szerint a 4. évfolyamos tanulók 23%-a nem szeret matematikát tanulni (nemzetközi átlag = 22%), 8. évfolyamon ez az arány lényegesen nagyobb, 58%, és ez a nemzetközi értéknél is jelentősen magasabb (nemzetközi átlag = 38%). A tendencia hasonló a tanulók magabiztosságában is: 4. évfolyamon a diákok 23%-a nem tartja magát magabiztosnak matematikafeladatok megoldásában (nemzetközi átlag = 23%), 8. évfolyamon az arány 42%-ra emelkedik (nemzetközi átlag = 43%) (Szalay et al., 2016).

Az egyes affektív személyiségkomponensek ugyan összefüggést mutatnak a matematikai teljesítménnyel, azonban a korrelációk és az általános tendenciák mögött összetett hatásmechanizmusok tárhatók fel. Általánosságban elmondható,

hogy kívánatos célként jelenik meg az érzelmileg támogató, motiváló tanulási környezet kialakítása, melyben a tanulók a képességszintjüknek megfelelő feladatokkal dolgozhatnak, a problémák felkeltik érdeklődésüket, kapcsolódnak a mindennapi tapasztalatokhoz és más tantárgyakhoz, a megoldás keresése során oldott légkörben (lásd a humor szerepének tudományos vizsgálatát a matematikai feladatmegoldásban, Van Dooren et al., 2019) együttműködhetnek társaikkal. Az utóbbi években számos ígéretes kutatási eredmény látott napvilágot, amelyek hozzájárulhatnak a célok eléréséhez. Megjelent a metaemóció fogalma a matematikatanítás kapcsán (De Corte et al., 2011), illetve egyre nagyobb hangsúlyt kap a szülők szerepének vizsgálata a tanulók matematikához való viszonyának alakításában (Buff et al., 2016).

### A MATEMATIKÁT TANÍTÓ PEDAGÓGUSOK

Általánosságban jellemző a világ fejlett országaiban, hogy nagyjából a tíz-tizenkét éves korosztálytól szaktanári rendszer működik az intézményes nevelésben, míg a kisebb gyermekek matematikai gondolkodása fejlesztésének feladatát a valamennyi tantárgy vagy tudásterület tanítására felkészült tanítók és óvodapedagógusok látják el. A pedagógusok felkészültségével és felkészítésével foglalkozó kutatások a mai napig merítenek Lee S. Shulman (1986) fogalmi rendszeréből, melyben a tanításhoz szükséges pedagógiai tudás több, egybefonódó réteget tárta elénk. Shulman szerint a pedagógus számára rendkívül lényeges a megfelelő szintű pedagógiai tartalmi tudás (pedagogical content knowledge), amely a konkrét tudományterületekhez köthető tartalmak tanítására való felkészültséget jelenti (magyar megfelelője a tantárgy-pedagógiai tudás lehet) – kiegészítve és meghaladva az adott tudományterülethez kötődő tartalmi tudást (content knowledge). A pedagógiai tartalmi tudás elemei között szerepelnek azok a példák, analógiák, rajzos illusztrációk és a hozzájuk kötődő módszertani elemek, amelyekkel mások számára érthetővé tudjuk tenni a tananyagot. A shulmani elveket Heather C. Hill, Deborah Loewenberg Ball és Stephen G. Schilling (2008) nem csupán aktualizálták a matematikára vonatkoztatva, hanem azt új elemekkel gazdagították. A matematika számára különösen érdekes a speciális tartalmi tudás (specialized content knowledge), amely szoros értelemben a matematikatudományhoz kapcsolódó tudást jelent, de abban a tanításhoz nélkülözhetetlen további elemek vannak: adott tananyag bemutatásának matematikai összefüggései, a várható tanulói megoldások és tévesztések ismerete.

A matematikai nevelésben részt vevő pedagógusok vizsgálatában két jellegzetes irányt látunk kibontakozni. A pedagógusi önreflexió erősítésére és a tanári professzió mélyítésére kiterjedten alkalmazzák a videóra rögzített tevékenységek elemzését (Santagata–Guarino, 2011) és a tanári hálózatok kommunikáci-

ős erejében rejlő lehetőségeket (van Es–Sherin, 2010). Emellett leendő és pályán lévő pedagógusok körében gyakran vizsgálnak olyan pszichikus tulajdonságokat, amelyeket egyébként (időben gyakran korábbiól eredeztethetően) a gyermekek, tanulók körében is szokásosan vizsgálnak. Egyrészt a pedagógusok és a gyerekek tulajdonságai közötti összefüggések lényegesek (a matematikai szorongás gyermekkori eredetéről lásd Bekdemir, 2010), másrészt pedig önmagában is megszabja a fejlesztési lehetőségeket, ha tudjuk, milyen nézeteket vallanak a tanítók és a matematikatanárok a matematikáról, milyen tévképzeteik és nem utolsósorban milyen tudáselemeik vannak (Beswick, 2012).

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány megírását „A köznevelés keretrendszeréhez kapcsolódó mérési-értékelési és digitális fejlesztések, innovatív oktatásszervezési eljárások kialakítása, megújítása” (EFOP-3.2.15-VEKOP-17-2017-00001) projekt és az ELTE Tanító- és Óvőképző Kara Kisgyermek-nevelési Kutatóközpontja támogatta.

### IRODALOM

- Artigue, M. – Blomhøj, M. (2013): Conceptualizing Inquiry-based Education in Mathematics. *ZDM*, 45, 797–810. DOI: 10.1007/s11858-013-0506-6, [https://www.researchgate.net/publication/258167448\\_Conceptualizing\\_inquiry-based\\_education\\_in\\_mathematics](https://www.researchgate.net/publication/258167448_Conceptualizing_inquiry-based_education_in_mathematics)
- Bekdemir, M. (2010): The Pre-service Teachers' Mathematics Anxiety Related to Depth of Negative Experiences in Mathematics Classroom While They Were Students. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 311–328. DOI: 10.1007/s10649-010-9260-7, <https://bit.ly/2O2Cnpp>
- Berze G. – Csíkos C. (2017): Parents' and Teachers' Views on the Distinct Role of Mathematics as a School Subject. In: Kaur, B. – Ho, W. K. – Toh, T. L. et al. (eds.): *Proceedings of the 41<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 2. Singapore: PME, 161–168.
- Beswick, K. (2012): Teachers' Beliefs about School Mathematics and Mathematician' Mathematics and Their Relationship to Practice. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 127–147. DOI: 10.1007/s10649-011-9333-2, <https://bit.ly/2CxBpwo>
- Buff, A. – Reusser, K. – Dinkelmann, I. (2016): Parental Support and Enjoyment of Learning in Mathematics: Does Change in Parental Support Predict Change in Enjoyment of Learning? *ZDM*, 49, 423–434. DOI: 10.1007/s11858-016-0823-7, <https://bit.ly/2KbdSWd>
- Csíkos Cs. – Szitányi J. – Kelemen R. (2012): The Effects of Using Drawings in Developing Young Children's Mathematical Problem Solving: A Design Experiment with Third-grade Hungarian Students. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 47–65. DOI: 10.1007/s10649-011-9360-z, <https://bit.ly/2q0cj6v>
- De Corte, E. – Depaepe, F. – Op't Eynde, P. et al. (2011): Students' Self-regulation of Emotions in Mathematics: An Analysis of Meta-emotional Knowledge and Skills. *ZDM*, 43, 483–495. DOI: 10.1007/s11858-011-0333-6



- Dowker, A. – Sarkar, A. – Looi, C. Y. (2016): Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, 7, 508. DOI: 10.3389/fpsyg.2016.00508, <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4842756/pdf/fpsyg-07-00508.pdf>
- Faber, J. M. – Luyten, H. – Visscher, A. J. (2017): The Effects of a Digital Formative Assessment Tool on Mathematics Achievement and Student Motivation: Results of a Randomized Experiment. *Computers & Education*, 106, 83–96. DOI: doi.org/10.1016/j.compedu.2016.12.001, <https://bit.ly/2rt0zcZ>
- Gal, H. – Linchevski, L. (2010): To See Or Not to See: Analyzing Difficulties in Geometry from the Perspective of Visual Perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 163–183. DOI: 10.1007/s10649-010-9232-y
- Hill, H. C. – Ball, D. L. – Schilling, S. G. (2008): Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Content-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372–400. <https://pdfs.semanticscholar.org/9a72/f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60.pdf>
- Inglis, M. – Alcock, L. (2012): Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 358–390. DOI: 10.5951/jresmetheduc.43.4.0358, <https://pdfs.semanticscholar.org/494e/7981ee892d500139708e53901d6260bd83b1.pdf>
- Józsa K. – Fejes J. B. (2012): A tanulás affektív tényezői. In: Csapó B. (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 367–406. [http://www.staff.u-szeged.hu/~fejesj/pdf/Jozsa-Fejes\\_2012\\_Affektiv\\_tenyezok.pdf](http://www.staff.u-szeged.hu/~fejesj/pdf/Jozsa-Fejes_2012_Affektiv_tenyezok.pdf)
- Luttenberger, S. – Wimmer, S. – Paechter, M. (2018): Spotlight on Math Anxiety. *Psychology Research and Behavior Management*, 11, 311. DOI: 10.2147/PRBM.S141421
- Molnár G. – Csapó B. (2019): Technology-based Diagnostic Assessments for Identifying Early Learning Difficulties in Mathematics. In: Fritz-Stratmann, A. – Räsänen, P. – Haase, V. (eds.): *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Heidelberg: Springer, 683–707. DOI: 10.1007/978-3-319-97148-3\_40, <http://publicatio.bibl.u-szeged.hu/14847/>
- Moore, K. C. – Carlson, M. P. (2012): Students' Images of Problem Contexts When Solving Applied Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 48–59. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.09.001, [https://www.researchgate.net/publication/253952994\\_Students'\\_images\\_of\\_problem\\_contexts\\_when\\_solving\\_applied\\_problems](https://www.researchgate.net/publication/253952994_Students'_images_of_problem_contexts_when_solving_applied_problems)
- OECD (2016): *PISA 2015 Results*. Volume I. *Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing, DOI: 10.1787/9789264266490-en, <https://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm>
- Pásztor A. (2017): Tanulói szintű visszacsatolás és fejlesztés: technológia alapú mérések alkalmazási lehetőségei a mindennapi pedagógia gyakorlatban. In: Hunyady Gy. – Csapó B. – Pusztay G. et al. (szerk.): *Az oktatás korproblémái*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó, [http://www.edu.u-szeged.hu/phd/people/apasztor/PDF/Pasztor\\_A\\_MTU\\_2016\\_visszacsatolas\\_%C3%A9s\\_fejlesztetes.pdf](http://www.edu.u-szeged.hu/phd/people/apasztor/PDF/Pasztor_A_MTU_2016_visszacsatolas_%C3%A9s_fejlesztetes.pdf)
- Prediger, S. – Fischer, C. – Selter, C. et al. (2018): Combining Material- and Community-based Implementation Strategies for Scaling up: The Case of Supporting Low-achieving Middle School Students. *Educational Studies in Mathematics*, 1–18. DOI: 10.1007/s10649-018-9835-2, <https://bit.ly/2XlmiEG>
- Santagata, R. – Guarino, J. (2011): Using Video to Teach Future Teachers to Learn from Teaching. *ZDM*, 43, 133–145. DOI: 10.1007/s11858-010-0292-3, <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs11858-010-0292-3.pdf>
- Schukajlow, S. – Rakoczy, K. – Pekrun, R. (2017): Emotions and Motivation in Mathematics Education: Theoretical Considerations and Empirical Contributions. *ZDM*, 49, 307–322. DOI: 10.1007/s11858-017-0864-6, <https://bit.ly/2K7hTLM>

- Shulman, L. S. (1986): Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15, 4–14. DOI: 10.3102/0013189X015002004, [http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman\\_1986.pdf](http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf)
- Szalay B. – Szepesi I. – Vadász Cs. (2016): *TIMSS 2015 – Összefoglaló jelentés*. Budapest: Oktatási Hivatal, [https://www.oktatas.hu/pub\\_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi\\_meresek/timss/TIMSS2015.pdf](https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/timss/TIMSS2015.pdf)
- Van Dooren, W. – Lem, S. – De Wortelaer, H. et al. (2019): Improving Realistic Word Problem Solving by Using Humor. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 96–104. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.06.008, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312318300440?via%3Dihub>
- van Es, E. A. – Sherin, M. G. (2010): The Influence of Video Clubs on Teachers' Thinking and Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 155–176. DOI: 10.1007/s10857-009-9130-3, <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-009-9130-3>