2. FEJEZET

ÚJSZERŰ FELADATOK ÉS FOGLALKOZÁSTERVEK A FIZIKA OKTATÁSÁHOZ

Radnóti Katalin

A mozgásfolyamatok értelmezése kapcsán a közoktatás évfolyamain lényeges pont, hogy a tanulók megértsék, a testek nem külső hatásra mozognak, hanem a külső hatás éppen a mozgásállapot megváltoztatásához kell. *Arisztotelész* fizikájában a mozgásnak mindig oka van, ha nincs mozgást fenntartó tényező, akkor a test megáll. A newtoni elvek szerint azonban a mozgás nem szűnik meg spontán módon, inerciarendszerben a magukra hagyott testek állnak, vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végeznek. A két szemléletmód alapvetően különbözik egymástól, *az arisztotelészi szerint a mozgást valaminek fent kell tartania, a newtoni szerint a mozgás* ***megváltoztatásához*** *kell valamilyen hatás.* A fizikában az erő fogalma a testek közötti kölcsönhatás jellemzésére használatos, amelynek hatására megváltozik a vizsgált test mozgásállapota.

Ebben a fejezetben néhány példát mutatunk arra, hogy milyen új elemeket lehet bevinni a fizika oktatásába. Hogyan lehet az ismert kísérleteket kutatási szemléletben feldolgozni, miként lehet a függvénytáblázat adatait megjeleníteni, szemléletessé tenni, valamint eredeti, tudományos szövegekkel színesíteni a tanórákat, fejleszteni a tanulók szövegfeldolgozó képességét és a természettudományos kutatások módszereire vonatkozó tudását. Az új szemléletű feladatok elősegíthetik a fizika alapjainak megértését, példákat mutatnak a matematika- és informatikaórán tanultak alkalmazására a fizikában.

MECHANIKA, GRAVITÁCIÓ

Célkitűzés a mozgás leírásához alkalmazható alapfogalmak, mint a *sebesség és a gyorsulás* fogalmak differenciálásának elősegítése, a *gyorsulás kapcsolása az erő* fogalmához. Vagyis a diákokat általában jellemző arisztotelészi mozgásfelfogás newtonivá alakítása, a további fizikatanulást alapvetően meghatározó fogalmi váltás elérése.

Fontos, hogy a tanulók megértsék a newtoni fizika alapgondolatainak *világképi jelentőségét* is, melyek alapvetőek az egész fizika mint tudomány, és ezzel együtt a jelenlegi technikai fejlődésünk létrejöttében. Az emberiség ezáltal értette meg a mozgást. Megteremtődtek azok az alapvető fogalmak, *problémamegoldási módszerek,* melyeket a későbbi korokban a további jelenségek leírásához (pl. az elektromos és mágneses jelenségek, termodinamikai folyamatok, de ténylegesen a kvantumos jelenségek leírásához is) mintának lehetett tekinteni.

A téma feldolgozása során sokféle mozgás elemzéséhez mutatunk példákat, melyekhez grafikonokat alkalmazunk, mint hely–idő, út–idő, sebesség–idő, gyorsulás–idő, energia–hely, energia–idő stb.

FÜGGŐLEGESHAJÍTÁS-FELADATOK

A foglalkozás jellemzői

90' 9.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
A sebesség és a gyorsulás fogalmak elkülönítése egy konkrét mozgás vizsgálata segítségével. Egy egyszerű feladathoz egyre több alkérdés megfogalmazása; a megoldás során matematikai segédeszközök alkalmazása (függvények ábrázolása, egyenletek megoldása); majd a kapott eredmények vizsgálata a fizikai realitás szempontjából.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
arányossági gondolkodás; összehasonlítás, analógiás gondolkodás, modellalkotás

Fejlesztett további készségek:
egyszerűsítési feltételek megfogalmazása, függvények ábrázolása

Fejlesztett tartalmi tudás:
A kinematika kulcsfogalmainak (út, elmozdulás, sebesség, gyorsulás) és ezek időbeli változásának vizsgálata a mozgás során.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép, Excel program

A sebesség és a gyorsulás, az út és az elmozdulás fogalmak elkülönítéséhez jó példa a függőleges hajítás elemzése. Nézzünk egy konkrét feladatot a *Fizikai feladatok* című gyűjteményből (Dér, Radnai, & Soós, 1986, 1.27. feladat p. 14), melyet többféle módon is kiegészítettem az évek során. Az egyes feladatrészek I. éves környezettan és a fizika BSc-re járó hallgatók zárthelyi dolgozataiban és szemináriumi foglalkozásain is szerepeltek az ún. felzárkóztató kurzuson. Az itt szerzett tapasztalataimat azért adom közre, mert *a téma középiskolai szintű.* A hallgatók tévképzetei középiskolai tanulmányaik ellenére is megmaradtak. Az alapfeladat a következő:

A Föld felszínétől 20 méter magasságban 50 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel fölfelé hajítunk egy testet. Milyen magasan lenne a Föld felszínétől, mekkora lenne az elmozdulása a $t = 8$ s időpontban, ha nem lenne közegellenállás? Mekkora lenne a befutott út ezen időpontig?[1]

1 A feladat részletes megoldása megtalálható: Radnóti Katalin (Ed.). (2014). *A természettudomány tanítása.* Szeged: MOZAIK Kiadó. Az itt bemutatott további kérdésekkel egységben láthatják az olvasók a bővítési lehetőségeket és a megoldásokkal kapcsolatos további meggondolásokat.

A g értékét 10 $\frac{m}{s^2}$-tel lehet közelíteni. Mi is ezt fogjuk tenni. Hogyan kezdjük el a feladat megoldását? A feladat szövege valójában nem túl érdekes, mely sok fizikai feladat esetében így van. De ez nem feltétlenül baj, mert így azt is meg lehet beszélni a diákokkal, hogy milyen valóságos szituációhoz köthető a feladat. Többféle szituációt ki lehet találni. Például vadászaton egy torony tetejéből nyilat lőnek ki egy madárra, de az nem talált, és így visszahullik. De lehet azt is, hogy valaki egy 7. emeleti erkélyről lő felfelé egy riasztópisztolyból.

Ezt követi az ábra készítése **(1. ábra)**, melybe célszerű beleírni a legfontosabb adatokat is. A nulla szintnek tekintsük a fellövés helyét, a torony tetejét, illetve az erkélyt!

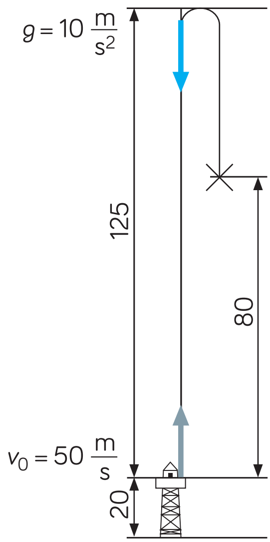
$$h = ? \quad \Delta r = ? \quad \text{és} \quad s = ?, \text{ha } t = 8\ \text{s}$$

Az *elmozdulásvektor nagyságát,* mely a kilövés helyétől mért magasság, megkapjuk, ha behelyettesítünk a megfelelő összefüggésbe:

$$|\Delta r| = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 50 \cdot 8 - 5 \cdot 64 =$$
$$= 400 - 320 = 80\ \text{m}.$$

Mivel 20 m magasból történt a hajítás, a test a Föld felszínétől $h = 100$ m magasan lesz a 8. másodperc végén.

A megtett út kiszámításához viszont tudni kell azt is, hogy ekkor még felfelé megy-e a test, vagy pedig már visszafelé jön. Ehhez meg kell gondolni azt, hogy a test vajon mennyi ideig megy felfelé? Mivel 50 $\frac{m}{s}$ a kezdősebesség, mely minden másodpercben 10 $\frac{m}{s}$-mal csökken, ezért felfelé csak 5 s-ig mehet a test. Tehát a 8. másodpercben már $t_{le} = 3$ s-ig lefelé esik.



1. ábra Függőlegesen felfelé hajított test

Ki kell tehát számolni, hogy milyen magasra megy a test, majd pedig 3 s alatt mennyivel kerül lejjebb a maximális magassághoz képest. Ez a második rész gyakorlatilag szabadesésnek tekinthető, hiszen a legmagasabb ponton nulla a test sebessége. A kettő összege adja a test által megtett utat. Az emelkedés magassága:

$$h_{emelkedés} = v_0 \cdot t_{emelkedés} - \frac{g \cdot t^2_{emelkedés}}{2} = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 25 = 250 - 125 = 125\ \text{m},$$

lefelé 3 s-ig esik, a megtett út: $$s = \frac{g \cdot t_{le}^2}{2} = 5 \cdot 9 = 45\ \text{m}.$$

Tehát a test által megtett *teljes út* hossza 170 m.

A megoldás elemzésénél célszerű kitérni a feladat szövegében szereplő kitételre, miszerint a közegellenállást hanyagoljuk el a megoldás során, és ezt is tettük. De meg kell jegyezni, hogy ilyen magasságok, befutott utak esetében ez ténylegesen nem hanyagolható el. A fellőtt nyíl vagy riasztólövedék biztosan nem megy fel 125 m magasra.

A feladat jól mutatja, hogy mi a különbség az elmozdulás és a megtett út fogalmak között, de alkalmas a fizikai problémákat jellemző *függvényszerű gondolkodás* fejlesztésére is. Fontos, hogy a különböző összefüggéseket a tanulók ne egyszerűen bemagolandó, vagy a függvénytáblázatból kikeresendő képleteknek lássák. Ezért célszerű a feladat esetében ábrázolni, felrajzolni az $r(t)$ **(2. ábra)**, az $s(t)$ **(3. ábra)**, továbbbá a $v(t)$ és $a(t)$ grafikonokat **(4. ábra)**. Ehhez ki lehet számítani, hogy például minden másodperc végén hol van a test, mekkora utat tett meg addig, mekkora az elmozdulása és a pillanatnyi sebessége **(1. táblázat)**. Nézzük azt az esetet, hogy a test visszaérkezik a kiindulási helyére! Ekkor a teljes mozgás 10 s-ig tart.

Idő (s)	Hely (m)	Út (m)	Sebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$
0	0	0	50
1	45	45	40
2	80	80	30
3	105	105	20
4	120	120	10
5	125	125	0
6	120	130	–10
7	105	145	–20
8	80	170	–30
9	45	205	–40
10	0	250	–50

1. táblázat A feldobott test mozgásának adatai

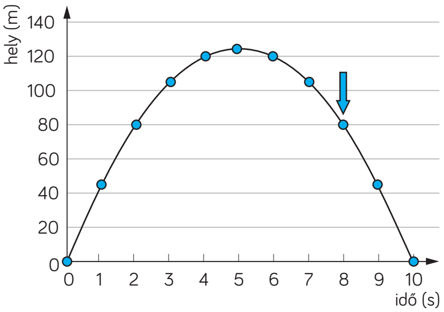
A grafikonokat célszerű egymás alá rajzolni, és az időhöz azonos léptéket használni! Így az egyes mozgásrészekhez tartozó jellemzők könnyen elemezhetők.

Az egyes pontokra függvényt lehet illeszteni, hiszen ténylegesen függvénykapcsolatról van szó. Kiszámíthattuk volna például az 1,5 s, vagy a 2,7 s időponthoz tartozó értékeket is. A feladatban csak a 8 s-hoz tartozó értékeket kellett számítani, de bármely más időpontot is meg lehet adni.

Az ábrázolt függvények a következők:

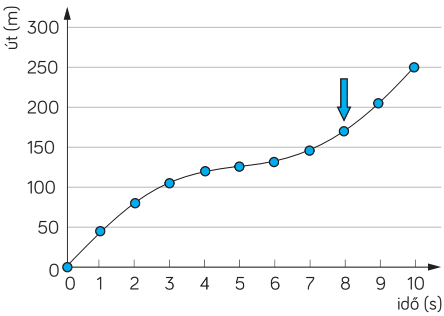
- hely–idő függvény,

  $r(t) = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$, mely egy parabola egyenlete **(2. ábra)**;



2. ábra A hely–idő függvény

- út–idő függvény két félparabola **(3. ábra)**, melynek első fele azonos a hely–idő függvény parabolájával, míg a második fele $s = 125\ \text{m} + \frac{g \cdot t^2}{2}$, ahol a t idő helyére a vizsgált időpont és az emelkedési idő különbségét kell írni, vagyis amitől kezdve már lefelé esik a test **(3. ábra)**;



3. ábra Az út–idő függvény

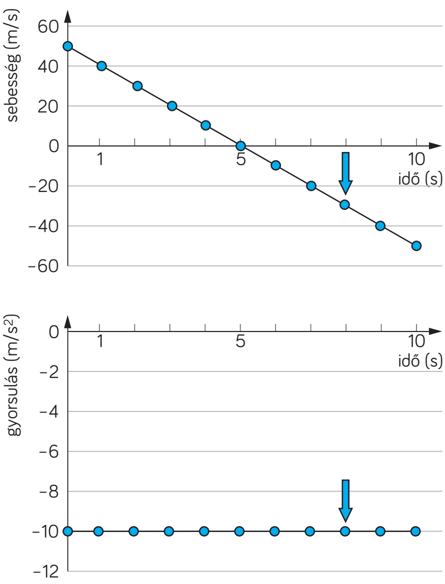
- sebesség–idő függvény,

  $v = v_0 - g \cdot t$, mely egy egyenes egyenlete.

  $50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal indul a test és a v(t) függvénynek negatív a meredeksége, hiszen a gyorsulás iránya ellentétes a sebesség irányával. A meredekség számértéke a gyorsulás nagysága **(4. ábra)**.

- gyorsulás–idő függvény

  $a = g = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, egy konstans függvény **(4. ábra)**.



4. ábra A sebesség–idő és a gyorsulás–idő függvények

A feladat rendszeresen szerepelt az úgynevezett felzárkóztató órákon, melyeket első éves egyetemisták számára tartottam. Olyan hallgatóknak, akiknek szakjuk elvégzéséhez szükséges volt fizikai ismeret, de mégsem rendelkeztek azokkal megfelelő mértékben. Érdekes volt sok esetben látni, hogy kiszámították a parabola függvény értékeit, majd berajzolták a megfelelő pontokat és végül a pontokra mindenáron egyenest akartak illeszteni, holott négyzetes összefüggéssel számoltak!

Ennek az lehet az oka, hogy az emberek sokszor a legegyszerűbb módon igyekeznek gondolkozni, és a legegyszerűbb kapcsolat az egyenes arányosság. Ennek pedig lineáris függvény felel meg. Ez a probléma leegyszerűsítése. Továbbá gyakori, hogy a diákok a számításokban csak képletekbe való behelyettesítést látnak, semmiféle matematikai vagy fizikai tartalmat nem rendelnek hozzá. A hallgatók mintegy „bambán" számoltak, ábrázolták a pontokat, majd behúzták az egyenest.

A *v(t)* függvény ábrázolása egyik alkalommal házi feladat lett a felzárkóztató órán. A következő órán megnéztem a hallgatók füzetében az otthon elkészített grafikonokat, melyek rendkívül tanulságosak voltak. Több hallgató a sebességek abszolút értékét ábrázolta. Mivel a legfelső pont elérése után ténylegesen növekszik a sebesség nagysága, náluk az 5 s-nál lévő zérus érték után monoton növekvő egyenes szerepelt. Vagyis nem vették figyelembe azt, hogy a sebesség vektormennyiség, annak iránya is van.

Az elmozdulás és a megtett út a *v(t)* grafikon alapján is számolható. Szépen látszik, hogy a „sebességgörbe" alatti terület az 5 s-ot követően, amikor a test már lefelé esik, negatívnak adódik. Tehát az elmozdulás számításánál ezt le kell vonni az 5 s-ig számítottból. Ellenben, ha a megtett utat számítjuk ki, akkor hozzá kell adni.

Miért rajzoltuk meg az *a(t)* függvényt is?

Az *a(t)* függvény egy konstans függvény, az adatok felírásánál is szerepel, hogy értéke nem változik a mozgás során, 10 $\frac{m}{s^2}$, és a sebességgel ellentétes irányú, amint az a feladatbeli jelenség elképzeléséhez készített ábrából is látható. Egyik alkalommal mégis feladtam házi feladatként az ábrázolását. Majd a következő órán ért a meglepetés a hallgatók füzetében található ábrákat nézegetve.

A 0–5 s közötti részben helyesen egy −10-hez rajzolt vízszintes szakaszt rajzoltak a hallgatók, de ez az 5 s-nál *előjelet váltott,* és onnan kezdve az 5–10 s közötti időközben már a +10-hez rajzolták a szakaszt. Ezt úgy magyarázták, hogy lefelé már nem lassul, hanem gyorsul a test.

A leírtak alapján többféle hiányosság is felfedezhető volt a diákok tudásában a feladat megoldása során.

- Egyrészt nem volt világos számukra a vektor fogalma: az, hogy a sebesség és a gyorsulás vektormennyiség, irányuk is van. Pedig ebben a feladatban csak egyenes vonalú mozgásról lévén szó, azt elegendő az irányokkal figyelembe venni. Nem értették rendesen a hallgatók a gyorsulás fogalmát sem, miszerint az azt jelenti, hogy a test sebessége mennyit változik 1 s alatt. Ez lehet növekedés, de csökkenés is! És ez a két vektor egymáshoz viszonyított irányától is függ. Amikor felfelé megy a test, akkor ellentétes irányúak, tehát lassul, amikor viszont már lefelé jön, akkor azonos az irány, tehát egyre nagyobb lesz a sebesség nagysága.
- Másrészt nem kapcsolódik rendesen a gyorsulás fogalma az erő fogalmához. Azt tudták a hallgatók, hogy a testre a Föld vonzásából származó erő hat, mely visszahúzza a testet, és az végig állandó nagyságú, függőlegesen lefelé mutató vektorral írható le. Ennek ellenére váltott előjelet a gyorsulás több hallgatónál.
- Sok esetben tapasztaltam, hogy a sebesség és a gyorsulás fogalmak keverednek. Több esetben rajzoltak a hallgatók *a(t)* függvényként is a *v(t)* függvényhez hasonló ábrát. Az, hogy a gyorsulás előjelet vált, szintén ennek tudható be. Hiszen a sebesség iránya változik meg.

Azt gondolom, hogy a négy függvény és azok egymáshoz való viszonyának megbeszélése fontos lehet a kinematika, de ezentúl a fizika alapfogalmainak megértéséhez is, hiszen a további fogalmak bevezetéséhez szemléleti alapot nyújtanak. Fontos továbbá a függvények matematikai kapcsolatait is megbeszélni.

- Az egyenes vonalú egyenletes mozgások út–idő grafikonjainak tárgyalásakor a gyorsabban mozgó test esetében meredekebb a grafikon. Ebben az esetben viszont változik a meredekség, mely abból adódik, hogy nem állandó a sebesség. Érdemes az elmozdulás–idő függvény néhány kiválasztott időpillanatához tartozó érintő meredekségét megnézni, berajzolni, mely a test pillanatnyi sebességéről mond információt. A mozgás elején viszonylag nagy az érintő meredeksége, majd egy közbenső pontban ez kisebb, és a legmagasabb pontban pedig nulla. Ezt követően az érintő meredeksége egyre nő, de ellenkező lesz az előjele.
- A sebesség–idő függvény az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében egy konstans függvény, ebben az esetben pedig nem. Értéke folyamatosan csökken, ahogy az érintő meredeksége a fenti függvény esetében, a legmagasabb pont esetében nulla, majd negatív értéket vesz fel, mivel előjelet vált. Abszolút értékben viszont egyre nagyobb lesz.

- A gyorsulás–idő függvény pedig a sebesség változásáról mond el információt. A sebesség–idő függvény meredeksége negatív, és nem változik. Tehát a gyorsulás–idő függvény konstans függvény kell legyen.

Ténylegesen azt próbáltam leírni szemléletesen, hogy ezek a függvények egymás derivált függvényei, mely sajnos nem tananyag a középiskolában.

EXCEL PROGRAM ÉS/VAGY TÁBLA, FÜZET HASZNÁLATA

A fentebb leírt feldolgozást én a táblánál csináltam meg, mind a táblázatot, mind pedig az ábrázolásokat. A hallgatók a füzetükben számoltak, többször is az azonos összefüggésekkel, és ábrázolták a függvényeket. Ez utóbbihoz kockás (négyzetrácsos) füzetet kértem, hogy könnyebb legyen a pontok ábrázolása. De így is szükséges volt átgondolni a tengelyeken a léptékeket. Ez szerintem fontos volt, hiszen például így derült az ki, hogy a négyzetes összefüggéssel kiszámított értékeket jelző pontokra is egyenest akart illeszteni néhány hallgató. Tudni kell még, hogy értékelés csak a félév végén történt. A foglalkozásokon lehetett kérdezni, és kifejezetten kértem is a hallgatókat, hogy mondják el hangosan a gondolataikat, egyáltalán nem probléma, ha az nem jó, hiszen én abból tudom meg, hogy mivel kell többet foglalkozni. A cél az volt, hogy a félév végén jó dolgozatot tudjanak írni.

A további hasonló feladatoknál azonban érdemes az Excelt használni: az ábrázolás mellett a több, azonos összefüggéssel való számításhoz az alkalmazott függvény másolásával. Sőt, kész programokat is lehet használni, amelyekbe be lehet írni a kezdeti feltételeket, és az algoritmus ezek alapján számol és ábrázol akár több függvényt is. De csak akkor, ha a diákok már teljesen tisztában vannak a fizikai tartalommal. És ehhez véleményem szerint szükséges a saját tapasztalatszerzés: a számítások önálló elvégzése és a grafikonok saját kezű megrajzolása.

Felmérések

Tapasztalataim alapján kíváncsi voltam, hogy a fentebb leírt hallgatói meggondolások mennyire jelennek meg a közoktatásból éppen kikerülő és fizika szakra felvett diákoknál, ezért a tanév elején íratott, úgynevezett kritérium dolgozatba több évben is betettem hasonló feladatot (Nagy & Radnóti, 2014a). Jelen írásban azt mutatom be, amikor a fenti alapfeladatot bővítettem ki különböző formákban.

Az alapfeladat csak kinematikai ismereteket vár el. Ezt kibővítettem dinamikaival is, hogy lássam, mennyire tudják a diákok a gyorsulás és az erő fogalmakat egymáshoz kapcsolni. Továbbá megjelennek-e egyéb tévképzetek (pl. fogalmi differenciálatlanság a sebesség és a gyorsulás esetében, arisztotelészi szemléletmód stb.).

2014 szeptemberében a következőképp adtam fel a feladatot:

A Föld felszínétől 20 méter magasságban 50 $\frac{m}{s}$ kezdősebességgel fölfelé hajítunk egy 100 g tömegű testet.

a) Milyen magasan lenne a Föld felszínétől, és mekkora lenne az elmozdulása a $t = 8$ s időpontban, ha nem lenne közegellenállás?

b) Mekkora lenne a befutott út ezen időpontig?

c) Mennyi idő múlva érkezhet a kilőtt lövedék a talajra?

d) Rajzolja fel egymás alá a mozgás hely–idő, út–idő, sebesség–idő és gyorsulás–idő grafikonjait!

Ehhez segítségként töltse ki az alábbi táblázatot!

e) Milyen közelítést alkalmaz a számolás során?

A plusz feladat egy táblázat kitöltése volt. A feladatban megadtam a felfelé hajított test tömegét azért, hogy olyan dinamikai jellegű kérdést is feltehessek, mint a testre ható erő és a test lendületének kiszámítása különböző időpillanatokban. A megoldást a **2. táblázat** mutatja.

Idő (s)	Hely (m)	Út (m)	Sebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$	Gyorsulás $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	Erő (N)	Lendület $\left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)$
1	45	45	40	–10	–1	4
2	80	80	30	–10	–1	3
3	105	105	20	–10	–1	2
4	120	120	10	–10	–1	1
5	125	125	0	–10	–1	0
6	120	130	–10	–10	–1	–1
7	105	145	–20	–10	–1	–2
8	80	170	–30	–10	–1	–3
9	45	205	–40	–10	–1	–4
10	0	250	–50	–10	–1	–5
.						
.						

2. táblázat A helyesen kitöltött táblázat

Több esetben jelent meg az alábbi tévképzet a diákok dolgozataiban **(3. táblázat):**

Idő (s)	Hely (m)	Út (m)	Sebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$	Gyorsulás $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	Erő (N)	Lendület $\left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)$
1				−10		
2				−10		
3				−10		
4				−10		
5			0	0	0	0
6				10		
7				10		
8				10		
9				10		
10				10		
.						
.						

3. táblázat Egy jellegzetes tévképzetet tartalmazó tanulói táblázat

Az a téves elképzelés, hogy a gyorsulás iránya megváltozik a legfelső ponton, még a fizika szakra felvett diákok esetében is megjelent! Ha a kezdősebesség irányát, vagyis a függőlegesen felfelé irányt választjuk pozitív iránynak, akkor a gyorsulás előjele végig negatív. Nem vált előjelet. Ellenben a sebesség igen, hiszen a test mozgásiránya ellentétes lesz a legfelső ponton.

A legfelső pont is érdekes. Ebben a helyzetben a test sebessége, és ezért impulzusa valóban nulla, hiszen egy pillanatra megáll a test, mielőtt visszafordul. De a gyorsulása, és így a rá ható erő nem nulla ebben a helyzetben sem! Itt a sebesség–gyorsulás, illetve az impulzus–erő fogalmak differenciálatlan volta érhető tetten a tanulók gondolkodásában.

39%-os volt a feladat megoldottsága, tehát nem tartozott a könnyű feladatok közé.

Továbbfejlesztettem, és némileg kibővítve 2017 szeptemberében a következőképp adtam fel a feladatot:

A Föld felszínétől 20 méter magasságban 50 $\frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen fellövünk egy 100 g tömegű testet. (A közegellenállást elhanyagoljuk és $g = 10\ \frac{m}{s^2}$-nek vehető.)

a) Mennyi idő múlva érkezhet a kilőtt lövedék vissza a kiindulási helyére?

b) Mennyi idő múlva érkezhet le a test a talajra?
Adjon előzetes becslést, majd számítsa ki és hasonlítsa össze a becslést a számítással!

c) Mikor egyezik meg a helyzeti és a mozgási energia értéke? A test helyzeti energiáját az elindítás helyétől számítsa!
Mik lehetnek ennek a pontnak (pontoknak) a hely és az időkoordinátái?
Adjon előzetes becslést, majd számítsa ki és hasonlítsa össze!

d) Rajzolja fel a mozgási energia–idő és a helyzeti energia–idő grafikonokat egyazon ábrába!

e) Rajzolja fel a mozgási energia–hely és a helyzeti energia–hely grafikonokat egyazon ábrába!

A plusz feladat ebben az esetben is egy táblázat kitöltése volt. Megadtam még a felfelé hajított test tömegét azért, hogy olyan dinamikai jellegű kérdést is feltehessek, mint a testre ható erő és a test lendületének kiszámítása különböző időpillanatokban. Ezen túl energetikai jellegű kiegészítés is szerepelt. További érdekessége a feladatnak az előzetes becslés kérése. A megoldást a **4. táblázat** mutatja.

Idő (s)	Sebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$	Gyorsulás $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	Hely (m)	Mozgási energia (J)	Helyzeti energia (J)
0	50	-10	0	125	0
1	40	-10	45	80	45
2	30	-10	80	45	80
3	20	-10	105	20	105
4	10	-10	120	5	120
5	0	-10	125	0	125
6	-10	-10	120	5	120
7	-20	-10	105	20	105
8	-30	-10	80	45	80
9	-40	-10	45	80	45
10	-50	-10	0	125	0

4. táblázat A helyesen kitöltött táblázat *a)* 10 s múlva érkezik vissza a kiindulási helyre.

b) A talajra 10 s-nál kicsit több idő múlva. De nem sokkal több, hiszen csak 20 méterrel kerül lejjebb, és már nagy a sebessége.

De csak ez az egy megoldás adódhat?

A hely–idő függvény másodfokú. Másodfokú egyenletet kell megoldani, tehát két megoldás lesz. Mindkét megoldás értelmes lesz fizikailag?

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0$$

Rendezzük az egyenletet a szokásos másodfokú formára! Akár be is írhatjuk a számadatokat.

$$-5 \cdot t^2 + 50 \cdot t + 20 = 0$$

Helyettesítsünk be a megoldóképletbe!

$$t = 5 \pm 5{,}38$$

Tehát valóban két megoldás van. Az egyik 10,38 s, melyre számítottunk, és amely valóban kicsit nagyobb, mint 10 s.
A másik gyök pedig −0,38 s, negatív, melynek nincs fizikailag értelme.

c) Mikor egyezik meg a helyzeti és a mozgási energia értéke? Mik lehetnek ennek a pontnak (pontokna*k)* a hely és az időkoordinátái?

A vizsgált helyzet akkor áll fenn, ha mind a helyzeti, mind a mozgási energia értéke az összenergia felével egyezik meg. A maximális *magasságnak* éppen a felénél, hiszen a helyzeti energia egyenesen arányos a kiindulási helyzettől mérhető távolsággal, vagyis $\frac{125\text{ m}}{2} = 62{,}5\text{ m}$. És ez az állapot bekövetkezik mind a felfelé, mind pedig a lefelé úton. Egyenesek metszéspontjairól van szó.

Az *idő* esetében már bonyolultabb a helyzet. Mivel az út az idő négyzetével arányos, így az energia esetében is így van. Tehát parabolák metszéspontjait kell vizsgálni. Azonban egyszerűsíthetünk a helyzeten. Nézzük meg, hogy a 62,5 m-es magasságot mennyi idő alatt éri el a test! Helyettesítsünk be az út–idő függvényt leíró összefüggésbe:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$62{,}5 = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Rendezve a másodfokú egyenletet:

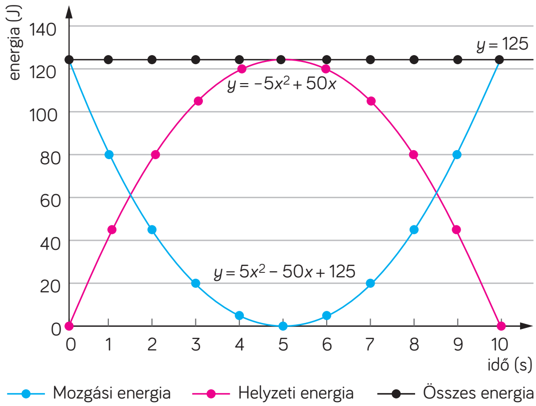
$$5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 62{,}5 = 0,$$

innen az időre két megoldás is adódik, 8,55 s és 1,45 s, mely mindkettő jó is, hiszen tudjuk, hogy a test felmegy, majd leesik, látjuk a grafikonról is, hogy két megoldásnak kell lenni. És mindkét idő 10 s-on belül van, ami a mozgás teljes ideje, míg a test visszaérkezik a kiindulási helyére. És az időértékek szimmetrikusak, amint maga a mozgás is, hiszen

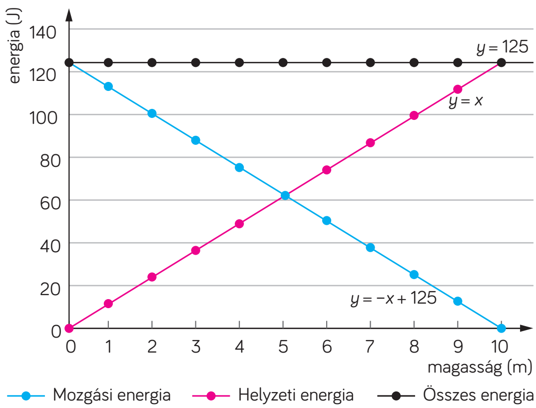
$$10 \text{ s} - 8{,}55 \text{ s} = 1{,}45 \text{ s}.$$

d) és *e)*

Idő (s)	E_{mozg} (J)	E_{pot} (J)	$E_{összes}$ (J)
0	125	0	125
1	80	45	125
2	45	80	125
3	20	105	125
4	5	120	125
5	0	125	125
6	5	120	125
7	20	105	125
8	45	80	125
9	80	45	125
10	125	0	125



Hely (m)	E_{mozg} (J)	E_{pot} (J)	$E_{összes}$ (J)
0	125	0	125
45	80	45	125
80	45	80	125
105	20	105	125
120	5	120	125
125	0	125	125
120	5	120	125
105	20	105	125
80	45	80	125
45	80	45	125
0	125	0	125



5. ábra Az energia alakulása az idő és a hely (magasság) függvényében

Az ábrázolásból látható (**5. ábra**), hogy ugyanazok az energiaértékek másképp függnek a test helyétől, a megtett úttól és a mozgás idejétől! Az energia a magasságnak lineáris függvénye, de mivel egyenletesen gyorsuló mozgásról van szó, és az út négyzetesen függ az időtől, ennek így kell lenni az energia esetében is. Tehát az időfüggvényeknek paraboláknak kell lenniük.

Ez sokaknak sikerült is. A függvények egyenletét persze csak az Excel-ábrára tettük rá, az nem volt kérdés. De érdemes azokat is elemezni.

Néhányan nem vették figyelembe azt a kitételt, hogy *„A test helyzeti energiáját az elindítás helyétől számítsa!”* Ez okozott is némi nehézséget számukra.

A feladat céljai és a tapasztalatok

- *Annak vizsgálata, hogy a sebesség és a gyorsulás fogalma elkülönül-e rendesen a tanulók gondolkodásában.* A korábbi évek tapasztalata az volt, hogy amikor a test mozgásának iránya ellentétes lesz, vagyis a legfelső ponton, akkor a hallgatók egy része szerint megfordul a gyorsulás iránya is. Holott csak a Föld hat a testre (a közegellenállástól eltekintve), végig ugyanabban az irányban. A gyorsulás irányának változására vonatkozó tévedést ebben az évben is tapasztaltam a 70 főből 21 esetben, ami nem kevés. Néhány esetben az is előfordult, hogy a legfelső pontban, az 5 s-nál a gyorsulás értékére 0-t írtak, majd megjelent a már említett előjelváltás. A sebesség esetében 22 diák nem jelölte a sebesség irányának változását. Az előbb említett fogalmi problémák ellenére ezen hallgatók jelentős része is jól, vagy részben jól el tudta végezni a számításokat. Ez arra enged következtetni, hogy pontos fogalmi megértés hiányában, a jelenség végiggondolása nélkül, egyszerűen csak a képletekbe való behelyettesítéssel oldották meg korábban a gyakorlófeladatokat. Egyes hallgatók esetében az a tapasztalatom, hogy „megfordítják” a koordináta-rendszert is a feladat megoldása közben.
- *Függvények ábrázolása.* Ez általában rendben volt. Ebben sokat segített a kitöltött táblázat.
- *A várható eredmény becslése a mozgás lefolyása és a mozgást leíró függvények ismerete alapján.* Ez szokatlan elem egy dolgozat esetében. De ennek ellenére sok hallgató próbálkozott, nem is eredménytelenül.

  Többen helyesen átgondolták, hogy a test a talaj felé haladva a kiindulási helyre 10 s elteltével 50 $\frac{m}{s}$-mal érkezik vissza. Így ahhoz, hogy még 20 m-t megtegyen 10 $\frac{m}{s^2}$-tel gyorsulva, nagyon kevés idő szükséges. Tehát az összes idő 10 s-nál kicsit nagyobb lesz. Az időre két megoldás adódott, és mivel a másik negatív volt, az nem volt megfelelő a feladat szempontjából, amire sokan utaltak is.

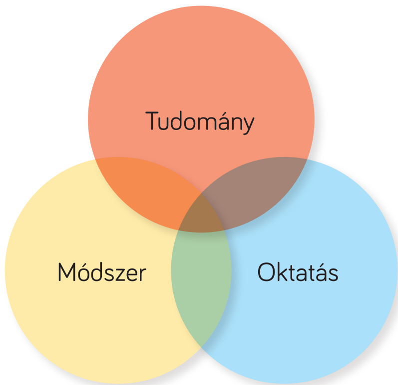
A másik esetben is megfelelően átgondolták, hogy két megoldásnak kell lennie. Ebben segített a grafikon is, és az, hogy az idők 1,5 s és 8,5 s körül lesznek. Volt, aki azt is jól átgondolta, hogy mivel 5 s-ig megy fel a test, és lassul, tehát az idő-nek 2,5 s-nál kevesebbnek kell lennie.

Érdekes volt ebben az esetben, hogy az sokaknak nem volt egyértelmű, hogy a hely a maximális magasság fele kell, hogy legyen. Többen bonyolult módon végül ki is számolták. Illetve voltak, akik csak az egyik időértéket számolták ki.

A feladat megoldottsága 60%-os volt. De tudni kell, hogy ebben az évben már szükséges volt a fizikaérettségi a felvételhez. Tökéletes megoldást mindössze 4 hallgató adott a 70 főből.

GALILEI, A MECHANIKA ATYJA

Galilei szerepe meghatározó *a fizika mint tudomány kialakulása* szempontjából, és a *tudományos módszer* kialakulásánál is hivatkoztunk rá. De ténylegesen a *fizika oktatása* is sokat köszönhet neki **(6. ábra)**. Könyveiben lépésről lépésre vezeti az olvasót, a mai terminológiával élve, az úgynevezett kérdve kifejtő és felfedeztető módszert alkalmazta. Mind a *Dialogo* (Galilei,1632/1983), mind a *Discorsi* (1638/1986) című művében három ember beszélget négy napon keresztül.



6. ábra Galilei szerepe a fizika oktatásában

A történeti szemlélet oktatási folyamatba történő beépítési lehetőségére mutatok példát a következő foglalkozástervekkel.

Az alábbi idézetek Galilei *Discorsi* című – az első fizikatankönyvnek tekinthető – könyvéből származnak, melyet élete vége felé, a per utáni házi őrizetben írt. Két idézetet mutatok be a könyvből, abban a sorrendben, ahogy abban megtalálhatók.

A Galilei eredeti szövegrészleteihez tartozó feladatok alkalmasak a kutatásalapú tanuláshoz, a kutatási képességek fejlesztésére.

Mindezen tevékenységek elősegítik a diákok természettudományos szemléletmódjának alakulását is, miszerint a természet megismeréséhez szükséges a tények, adatok gyűjtése, azok rendszerbe foglalása, a jelenségek ok-okozati elemzése. Ehhez a napjainkban már elterjedt matematikai eszközök alkalmazása komoly segítséget nyújt, amit most kiegészíthetünk az informatikával.

A foglalkozás jellemzői

45' 9.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Galilei életművének megismerése, a tőle vett eredeti idézetek értelmezése. Az egyes részek önmagukban is kezelhetők, de differenciált csoportmunkában is feldolgozható néhány, de akár az összes idézet.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, analógiás gondolkodás, arányossági gondolkodás, modellalkotás, kutatási készségek

Fejlesztett további készségek:
szövegértés, megmaradási tételek alkalmazása, egyszerűsítési feltételek megfogalmazása

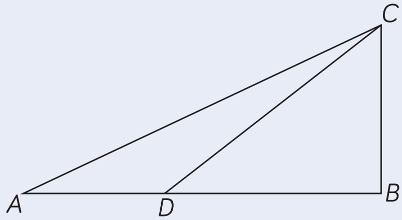
Fejlesztett tartalmi tudás:
A mechanika kulcsfogalmainak (sebesség, gyorsulás, energia) áttekintése.

Fejlesztett episztemikus tudás:
A természet megismeréséhez szükséges az adatok gyűjtése, azok rendszerbe foglalása, a jelenségek ok-okozati elemzése. Ehhez napjainkban komoly segítséget nyújt a matematikai eszközök alkalmazása.

Eszközök:
sokszorosított szövegek, füzet, íróeszköz, számítógép

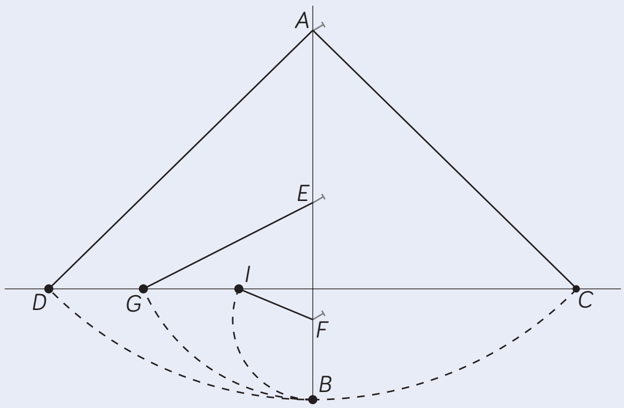
A MECHANIKAI ENERGIA MEGMARADÁSA

„Ha egy és ugyanazon test különböző hajlásszögű síkokon mozog lefelé, valahányszor a síkok magassága egyenlő, az általa szerzett sebességek is egyenlőek."
„A ferde sík magasságán azt a merőleges szakaszt értjük, amelyet a sík legfelső pontjától a sík legalsó pontján áthaladó vízszintes síkra bocsátunk: a jobb érthetőség kedvéért legyen az *AB* szakasz a vízszintessel párhuzamos, és jelöljön *CA*, *CD* két ferde síkot, ekkor a *BA* vízszintesre merőleges *CB* szakaszt nevezi a Szerző a *CA* és *CD* síkok magasságának, és feltételezi, hogy ha egy és ugyanazon test a *CA*, illetve a *CD* ferde síkok mentén gurul le, az *A* és *D* pontban mérhető sebességük egyen-



6. ábra Különböző hajlásszögű lejtők lő, mivel a síkokhoz *tartozó magasság ugyanaz a CB; sőt, értelemszerűen következik, hogy ugyanazon test C* pontból szabadon esve is ugyanilyen sebességgel rendelkezne a *B* végpontban." **(6. ábra)** (Galilei, 1638/1986, p. 186)

„…szeretném egy kísérlettel annyira hihetővé tenni, hogy szinte egyenértékű legyen egy tökéletesen szigorú bizonyítással. Képzeljük el, hogy ez a papírlap egy függőleges fal, amelybe szöget verünk, s a szögre két-három öl hosszú, vékony fonállal egy-két font súlyú ólomgolyót függesztünk úgy, hogy körülbelül kétujjnyira lógjon a faltól függőlegesen, és jelöljük meg a falon az *AB*-re merőleges, vízszintes *DC* szakaszt."



7. ábra Fonálinga

„…mozdítsuk el a fonalat és a golyót az *AC* helyzetbe, majd engedjük el: a *CBD* ív mentén fog mozogni, és megfigyelhetjük, hogy a *B* ponton áthaladva a *BD* íven folytatja mozgását, és csaknem a *CD* szakaszig eljut, csak egy egészen kicsiny köz hiányzik, és csupán azért nem éri el pontosan, mert a levegő és a szál akadályozza, joggal következtethetünk tehát arra, hogy az az impetus, amelyet a golyó a *CB* ív mentén mozogva a *B* pontig szerzett éppen elég ahhoz, hogy a *BD* ív mentén ugyanolyan magasra felmenjen. Több ízben ismételjük meg a kísérletet, majd verjünk a falba az *AB* függőleges vonalába egy szöget, például *E*-be vagy *F*-be úgy, hogy öt-hat ujjnyira kiálljon, azért, hogy midőn az *AC* fonalon lévő *C* golyó a *CB* ív mentén mozogva eléri a *B* pontot, a szál ütközzön az *E*-ben lévő szögnek, és a mozgás az *E* középpontú *BG* körív mentén folytatódjon: meg fogjuk látni, mire képes az impetus, amely eddig a *B* pontból a *BD* ív mentén a *CD* vízszintesig vitte a golyót. Nos, uraim, legnagyobb örömünkre azt fogják tapasztalni, hogy a golyó a vízszintes szakaszon lévő *G* pontig emelkedik fel, és ugyanez történik akkor is, ha az akadályt alacsonyabbra, mondjuk az *F* pontba helyezzük: ekkor a golyó a *BI* ív mentén mozog, és megint pontosan a *CD* vízszintesig emelkedik; ha pedig a szög olyan alacsonyan van, hogy a szál alatta lévő része nem ér fel a *CD* magasságig (ami akkor fordulhat elő, ha a szög közelebb van a *B* ponthoz, mint az *AB* és *CD* szakaszok metszéspontjához), akkor a fonál a szög köré csavarodik." **(7. ábra)** (Galilei, 1638/1986, p. 188)

Lehetséges tanulói feladatok

- Olvassátok el az alábbi szöveget, majd próbáljátok meg belátni GALILEI állítását!
- Végezzétek el a GALILEI által leírt kísérleteket!
- Milyen módokon tudjátok bizonyítani az állítást a napjainkban alkalmazott matematikai jelölésekkel és GALILEI idejében még ismeretlen fogalmakkal? Miért jó GALILEI hasonlata?

Megoldás

Tehát azt kell megmutatni, hogy a legalsó pontban elért végsebesség csak a golyó h indítási magasságától függ.

- A megfogalmazottakat a mechanikai energia megmaradása első megnyilvánulásaként is fel lehet fogni, amelyet mai jelöléseinkkel így írunk: $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.
  Ebből a sebesség a lejtők alján, illetve az inga legalsó helyzetében, amennyiben az ingatest h magasságból indult:
  $$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$
  GALILEI ezt nem tudta így felírni, sőt még elmagyarázni sem, hiszen még az ehhez szükséges fogalmak sem léteztek. De nagyon jól ráérzett, hogy a két, látszólag teljesen különböző jelenség között mi lehet a hasonlóság.
- Dinamikai úton is megkaphatjuk ezt az összefüggést.
  A lejtő hossza, melyen a test legurul, kifejezhető a lejtő magasságából: $s = \frac{h}{\sin\alpha}$.
  $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$ és $v = at$, amiből $t = \frac{v}{a}$. Ezt az előbbibe beírva $s = \frac{v^2}{2a}$, ahonnan $v^2 = 2as$.
  GALILEI csak eddig tudott eljutni!
  A test gyorsulása: $a = g \cdot \sin\alpha$, melyeket beírva $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$, vagyis az előbbi összefüggés adódik.

A LEJTŐS KÍSÉRLETEK LEÍRÁSA

A szabadesés törvényszerűségei GALILEI színrelépése előtt már közel egy évszázada foglalkoztatták a tudósokat. Sok problémát okozott, hogy vajon a sebesség egyenletes változása az *idő* vagy pedig a *hely* függvényében értendő-e. Általában ez utóbbi elképzelést tartották valószínűnek, sokáig GALILEI is ebben gondolkodott. Majd későbbi *hipotézise* szerint mégis az idő függvényében változik a sebesség a szabadesés során, melyet már megpróbált a *Dialogo* című munkájában is megfogalmazni. Ez egy nagyon komoly szemléletváltás volt GALILEI részéről, mely valószínűleg több évig, évtizedig tarthatott. A témával kapcsolatos első kísérleteit, méréseit, melyekről feljegyzéseket készített, még az 1600 körüli években végezte padovai tanársága alatt. Ekkor találta ki, hogy *a lejtőn való mozgás jellege hasonló lehet a szabadeséshez. Minél inkább növeljük a lejtő hajlásszögét, annál nagyobb lesz a test gyorsulása, végül 90°-nál éppen szabadeséssel mozog.* A *Discorsi* írása alatt ezeket a több évtizeddel korábbi jegyzeteit használta, és próbálta megérteni a mozgást, a kapott eredményeket.

„Kerestünk egy körülbelül tizenkét rőf hosszú, fél rőf széles, háromujjnyi vastag lécet, illetve deszkát, hosszában (az éle mentén) rendkívül egyenes, ujjnyi széles csatornát vájtunk, gondosan megtisztítottuk és megcsiszoltuk, majd a lehető legfinomabb, tökéletesen sima pergament enyveztünk bele; a csatornában pedig egy tökéletesen gömb alakú és sima bronzgolyót gurítottunk le. A léc egyik végét rögzítettük, a másikat pedig tetszésünk szerint egy- vagy kétrőfnyire a vízszintes fölé emeltük, és, mint említettem, hagytuk, hogy a golyó végigguruljon a csatornában; gondosan megmértük a teljes mozgáshoz szükséges időt (mindjárt megmondom, hogyan); a kísérletet számtalanszor megismételve meggyőződtünk róla, hogy a futási idők soha, még a pulzusütés tizedrészével sem térnek el egymástól. Miután a kísérletet sokszor elvégeztük, és az eredmény mindig ugyanaz volt, úgy intéztük, hogy a golyó csupán a csatorna negyedrészén gurulhasson le; ismét megmértük a mozgáshoz szükséges időt, és megállapítottuk, hogy a lehető legpontosabban fele az előzőnek.

A kísérletet különböző részutakkal is elvégeztük, a teljes út megtételéhez szükséges időt előbb a fél, majd a kétharmad és a háromnegyed úthoz szükséges idővel hasonlítottuk össze, valamint más osztásokkal is; a méréseket legalább százszor megismételtük, és mindig az volt az eredmény, hogy a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint idők négyzetei, és ez igaz, akárhogyan rögzítjük is a sík, illetve a csatorna (ahol a golyó legurul) vízszintessel bezárt szögét; sőt azt is alkalmunk volt megfigyelni, hogy különböző hajlásszögek esetén a mozgáshoz szükséges idők pontosan úgy aránylanak egymáshoz, mint azt a Szerző egy későbbi tételében állítja és bizonyítja.

Az időt pedig a következő módszerrel mértük: felakasztottunk egy nagy, vízzel teli dézsát, amelyből a fenekébe illesztett csövecskéken keresztül vékony sugárban csordogált a víz; a kicsorgó vizet poharakban fogtuk fel mindaddig, amíg a vizsgált mozgás (a teljes csatorna vagy annak egy része mentén) tartott; az így összegyűjtött vizeket időről időre megmértük egy rendkívül pontos mérlegen, súlyaik különbségei és arányai megadták az időkülönbségeket és -arányokat, éspedig, mint említettem, olyan pontosan, hogy sok-sok mérés eredménye között nem volt lényeges eltérés.” (Galilei, 1638/1986, p. 196)

Megjegyzés: A rőf az eredeti szövegben „braccio”, egy korabeli toszkán hosszúság-egység, mely körülbelül 60 cm-nek felel meg.

A Galieli-féle lejtős kísérletet egy kutatás keretében megismételték egy firenzei középiskolában tanulókísérlet formájában (Straulino, 2008). A tanulók az eredeti szöveget tanulmányozták, ami nem volt különösebben nehéz, hiszen olaszul íródott (ráadásul toszkán dialektusban, amely egyben a hivatalos olasz nyelv is napjainkban). Ellenben nagyon fontos tudománytörténeti bevezető volt, mivel a tanulók a valóságban is látták, hogy Galilei milyen kérdésre kereste a választ a kísérlet során. Sok esetben „misztikus” a tanulók számára, hogy mit miért tanulnak, és egy kísérlet milyen kérdésre is adott választ, mit honnan is tudunk.

A méréshez egy hasonló lejtőt készítettek, amely 3,2 méter hosszú volt. Az időméréshez bürettát használtak, melyet 0,1 ml-es pontossággal olvastak le. Egy-egy mérés esetében 3–7 ml vízfogyást mértek. Minden távolságon 30 mérést végeztek, a mért értékeket hisztogramon ábrázolták, majd átlag- és hibaszámítást is végeztek. Végül ábrázolták a megtett utat az időnégyzet (vízfogyás ml-ben és ennek a négyzete) függvényében, melyre egyenest kaptak (Straulino, 2008).

Feladatok

Az alábbi kérdéseket tehetjük fel a diákok számára az idézettel kapcsolatban:

- Milyen volt Galilei kísérleti „berendezése”? (Rajzot is készíthettek, kutakodhattok az interneten.)
- Hogyan érte el Galilei, hogy minél kisebb legyen a súrlódás?
- Mi lehetett Galilei hipotézise, mielőtt a részutak nagyságát meghatározta?
- Hogyan mérte az időt Galilei?
- Hogyan változtatta Galilei kísérleti berendezését a mérés során? Milyen tényezőket változtatott?
- Milyen méréssorozatokat végzett el Galilei?
  - Foglaljátok táblázatba Galilei lehetséges mérési eredményeit a szöveg alapján!
  - Végezzetek el ti is hasonló méréseket!
- Mi volt Galilei tapasztalata? Milyen következtetésre jutott?

Megoldás

Lehetséges válaszok a kérdésekre a szövegből:

- Milyen volt Galilei kísérleti „berendezése”? (Rajzot is készíthettek, kutakodhattok az interneten.)
  „Kerestünk egy körülbelül tizenkét rőf hosszú, fél rőf széles, háromujjnyi vastag lécet, illetve deszkát [...]. A léc egyik végét rögzítettük, a másikat pedig tetszésünk szerint egy- vagy kétrőfnyire a vízszintes fölé emeltük, és, mint említettem, hagytuk, hogy a golyó végigguruljon a csatornában.”
- Hogyan érte el Galilei, hogy minél kisebb legyen a súrlódás?
  A lejtőként alkalmazott léc „...hosszában (az éle mentén) rendkívül egyenes, ujjnyi széles csatornát vájtunk, gondosan megtisztítottuk és megcsiszoltuk, majd a lehető legfinomabb, tökéletesen sima pergament enyveztünk bele; a csatornában pedig egy tökéletesen gömb alakú és sima bronzgolyót gurítottunk le.”
- Milyen hipotézise lehetett Galileinek, mielőtt a részutak nagyságát meghatározta?
  Könyvében a négyzetes úttörvény kísérleti igazolásaként írta le ezt az idézetet. De a kísérleteket évtizedekkel korábban végezte el.
  A fennmaradt jegyzetek szerint először a korszak elképzelésének megfelelően ő is arra gondolt, hogy a lejtőn elért sebesség a megtett úttal egyenesen arányos. De később már úgy látta, hogy annak a gyökével arányos.
- Hogyan mérte az időt Galilei?
  „Az időt pedig a következő módszerrel mértük: felakasztottunk egy nagy, vízzel teli dézsát, amelyből a fenekébe illesztett csövecskéken keresztül vékony sugárban csordogált a víz; a kicsorgó vizet poharakban fogtuk fel mindaddig, amíg a vizsgált mozgás (a teljes csatorna vagy annak egy része mentén) tartott; az így összegyűjtött vizeket időről időre megmértük egy rendkívül pontos mérlegen, súlyaik különbségei és arányai megadták az időkülönbségeket és -arányokat.”
- Hogyan változtatta Galilei kísérleti berendezését a mérés során? Milyen tényezőket változtatott?
  „...különböző hajlásszögek esetén a mozgáshoz szükséges idők...”
  - A mérés során különböző hosszúságú utak befutásához szükséges időket mért.
  - A méréssorozatot különböző hajlásszögek esetében is elvégezte.
- Milyen méréssorozatokat végzett el Galilei?
  - Foglaljátok táblázatba Galilei lehetséges mérési eredményeit, amelyek és ahogy azok a szövegből kiolvashatók!

„…a teljes út megtételéhez szükséges időt előbb a fél, majd a kétharmad és a háromnegyed úthoz szükséges idővel hasonlítottuk össze, valamint más osztásokkal is; …”
Változtatta: „…a csatorna (ahol a golyó legurul) vízszintessel bezárt szögét,…”
Például az alábbi lehet a mérési táblázat, melyhez hasonlót kell a különböző hajlásszögek esetében kitölteni (**5. táblázat**):

Mérni ténylegesen az időket kellett, melyeket a 2. sorba írhatott be Galilei, hiszen a távolságokat és a lejtő hajlásszögét előre beállította.

Út	s	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{3}$	$\frac{s}{4}$	$\frac{3s}{4}$	$\frac{2s}{3}$	…
Idő							
Az idő négyzete							
$\frac{s}{t^2}$							

5. táblázat A lejtős kísérlet adatai

- Mi volt Galilei tapasztalata?
  „…úgy intéztük, hogy a golyó csupán a csatorna negyedrészén gurulhasson le; ismét megmértük a mozgáshoz szükséges időt, és megállapítottuk, hogy a lehető legpontosabban fele az előzőnek…”
- Milyen következtetésre jutott Galilei?
  „…a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint idők négyzetei.”

A következőben bemutatok egy lehetséges méréssorozatot, és annak részletes kiértékelését. A táblázat a következő adatokat és számított mennyiségeket tartalmazhatja (**6. táblázat**):

Idő (önkényes egységekben)	1	2	3	4	5
Időegység alatt megtett út önkényes egységekben (páratlan számok)	1	3	5	7	9
Összes út (négyzetszámok)	1	4	9	16	25
Átlagsebességek (összes út / összes idő)	1	2	3	4	5
Pillanatnyi sebességek	2	4	6	8	10
Gyorsulás	2	2	2	2	2

6. táblázat A lejtős kísérlet lehetséges adatai

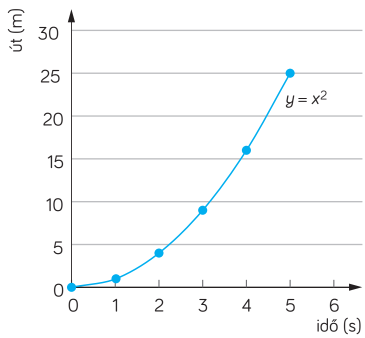
A mért értékek az időadatok vagy a távolságadatok. Például metronóm hangjára jelöljük be a megtett utakat. Vagy előre kijelölünk utakat (esetleg többfélét, majd meggondolások alapján éppen a négyzetszámoknak megfelelő hosszúságúakat), és az azok megtételéhez szükséges időket mérjük. A sebességek és a gyorsulások számítások eredményei.

Mivel a sebesség egyenletesen növekszik az idő függvényében, az időtartamok végén a pillanatnyi sebességek az átlagsebességek kétszeresei. A gyorsulás pedig a pillanatnyi sebességek megváltozása.

Az adatsorokat felhasználva az Excel program segítségével többféle grafikon is elkészíthető. Érdemes függvényt is illeszteni az ábrázolt pontokhoz. Az Excel a függvényillesztés esetében a matematikában megszokott y és x betűjelekkel írja ki a függvény egyenletét. Ezért minden esetben meg kell beszélni, hogy azok mit jelentenek, mely fizikai mennyiségnek felelnek meg. Ez nagyon fontos lépés abban, hogy a diákok lássák a *kapcsolatot a matematikában tanultak és azoknak a fizikában való alkalmazása között.* A fizikában mindig konkrét fizikai mennyiségekről van szó (út, idő, sebesség, gyorsulás), azok megfelelő értékeit jelenítjük meg a grafikonon, és ezeknek a mennyiségeknek külön betűjelük is van.

Mivel a fent vázolt mérés során önkényes egységeket alkalmaztunk, a mértékegységekkel most nem foglalkozunk, ez a későbbiekben kerül majd elő.

Az ábrázolást az út–idő függvény felrajzolásával érdemes kezdeni, és a kapott ábrát érdemes összehasonlítani az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő függvényével. (A függvény felvételekor a 0 időpillanathoz tartozó 0 utat is hozzárendeltem.) Míg ez utóbbi esetben a mérési pontokra egyenes fektethető, addig itt ez nem lehetséges **(8. ábra)**.



8. ábra Út–idő függvény

Az illesztett függvény egyenlete: $y = x^2$.

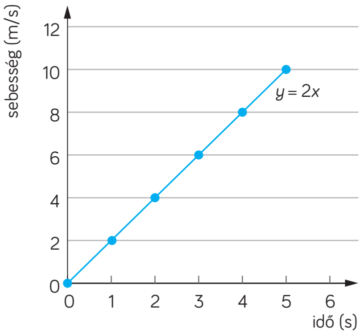
Ezt kell összehasonlítani a nulla kezdősebességgel induló, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás esetében tanult $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$ összefüggéssel ebben a konkrét esetben. Az y-nak az út (jele s), míg az x-nek az idő (jele t) felel meg.

És hol van a gyorsulás? Ezt azért nem látjuk, mivel a táblázat alapján a gyorsulás, az a mérőszáma 2, melynek a fele 1, és az 1-et, mint szorzótényezőt nem szokás kiírni.

A következő grafikon a pillanatnyi sebesség–idő függvény **(9. ábra)**. (A függvény felvételekor a 0 időpillanathoz tartozó 0 kezdősebességet is hozzárendeltem.)

Az illesztett függvény egyenlete: $y = 2x$. Ezt kell összehasonlítani a nulla kezdősebességgel induló, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás esetében tanult $v = at$ összefüggéssel ebben a konkrét esetben. Az y-nak a sebesség (jele v), míg az x-nek az idő (jele t) felel meg, ahogy az út–idő függvény esetében is.

Mit jelent a 2-es szorzó? Ez természetesen a gyorsulás számértéke. A gyorsulás–idő függvény képe egy konstans függvény, mely ábrázolásától eltekintettem, de természetesen ezt is meg kell beszélni a diákokkal.



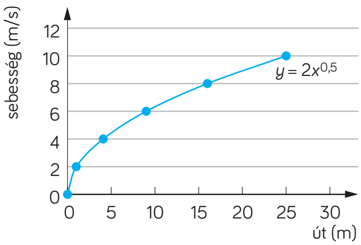
9. ábra A pillanatnyi sebesség az **idő** függvényében

Milyen függvényt lehetne még elkészíteni a táblázatban található adatok alapján? Nemcsak az idő, hanem a megtett út függvényében is lehet ábrázolni például a pillanatnyi sebességeket **(10. ábra)**. (A függvény felvételekor a 0 kezdősebességet is hozzárendeltem, de a helyhez tartozó 0 értéket a program nem tudja kezelni.)

Az illesztett függvény egyenlete: $y = 2x^{0,5}$.

Ez elég érdekes függvény. Az y-nak a sebesség (jele v), míg az x-nek a megtett út (jele s) felel meg. Mit jelent a 0,5 hatvány? Ez a gyökfüggvény, vagyis ezek szerint a sebesség az út gyökös függvénye.

Mit jelent a 2 érték? Végezzünk el néhány átalakítást az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás összefüggéseivel!



10. ábra A pillanatnyi sebesség az **út** függvényében

$s = \dfrac{a \cdot t^2}{2}$ és $v = at$, amelyből $t = \dfrac{v}{a}$, melyet előbbibe beírva $s = \dfrac{v^2}{2a}$, ahonnan $v^2 = 2as$, melyből: $v = \sqrt{2as}$. A $2a$, a gyorsulás kétszerese lehet a 2-es szorzó, hiszen $2 \cdot 2 = 4$, melynek gyöke ténylegesen 2.

EJTÉSI „KÍSÉRLETEK” EXCELBEN

A foglalkozás jellemzői

90' 9., 11.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Különböző nagyságú és anyagú, gömb alakú testek mozgásának tanulmányozása a mozgásegyenlet közelítő megoldásával.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, modellalkotás, arányossági gondolkodás, analógiás gondolkodás, matematika- és informatikatudás transzferálása a fizikai problémák megoldásához, kutatási készségek

Fejlesztett további készségek:
az Excel program használata, függvénykapcsolatok ábrázolása, egyszerűsítési feltételek megfogalmazása

Fejlesztett tartalmi tudás:
közegellenállás, mozgásegyenlet, gyorsulás–idő függvény, sebesség–idő függvény, út–idő függvények

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A szabadesés törvényszerűségei Galilei színre lépése előtt már közel egy évszázada foglalkoztatták a tudósokat. Mondhatni, a *korszak fő tudományos problémája volt.* Az arisztotelészi elképzelés szerint a nagyobb tömegű testek gyorsabban esnek. Tehát a 10-szer nagyobb tömegű test 10-szer gyorsabban, vagyis tizedanyi idő alatt érne földet. A 16. században azonban ezt a tételt már többen kétségbe vonták. Simon Stevin (1548–1620) németalföldi tudós 1586-ban megjelent könyvében már leírt egy szabadeséses kísérletet, melyet Simonyi Károly könyvéből idézünk (Simonyi 1978. p. 176).

> „Vegyünk két ólomgolyót (mint azt a felettébb tudós és a Természet titkait legserényebben kutató Jan Cornets de Groot úr, valamint jómagam tettük), amely ólomgolyók közül az egyik tízszer nagyobb és súlyosabb, mint a másik, és ejtsük le őket egyszerre 30 láb magasból egy deszkára vagy bármire, amin jól kivehető hangot adnak. Azt fogjuk találni…, hogy annyira egyidejűleg esnek a deszkára, hogy a két hang egynek és ugyanannak tűnik. Úgy találjuk, hogy akkor is ez történik, ha a két egyforma nagy golyóval kísérletezünk, amelyek súlya azonban úgy aránylik, mint egy a tízhez.”

Galilei vizsgálta a különböző sűrűségű testek különféle közegekben végzett mozgásait, majd ezekből általánosítva, szinte *szabályos határátmenettel* eljutott ahhoz az alapvető tételhez, hogy a vákuumban minden testnek, sűrűségétől és alakjától függetlenül egyforma gyorsulással kell esnie. A pisai ferde toronyból végzett ejtési kísérletekre viszont tőle nem találunk utalást.

HOGYAN ESNEK A TESTEK LEVEGŐBEN?

A levegőben elengedett golyókra három erő hat: a nehézségi erő, a felhajtóerő és a közegellenállási erő. A mozgásegyenlet tehát a következőképp néz ki:

$$ma = mg - F_{\text{felhajtó}} - F_{\text{közeg}}.$$

Fejtsük ezt ki!

$$ma = mg - \rho_{\text{lev}} V g - \frac{CA\rho_{\text{lev}} v^2}{2}.$$

Fejezzük ki a gyorsulást, vagyis osszunk a tömeggel:

$$a = g - \frac{\rho_{\text{lev}} V g}{m} - \frac{CA\rho_{\text{lev}} v^2}{2m}.$$

Gömb alakú tárgy esetében az A homlokfelület a kör területe. A $C = 0{,}45$ a golyó légellenállási tényezője.

A felhajtóerő csak a mozgás kezdeti szakaszában érdekes, majd elhanyagolható a közegellenállási erő mellett, mely a sebesség négyzetével arányosan növekszik. Erről néhány konkrét eset kiszámításával érdemes is meggyőződni. Mivel konstans, lehet úgy számolni, hogy az Excel programban a g helyére a sárga mezőbe a g-nek a felhajtóerő által okozott gyorsulással csökkentett értéket írják be a tanulók.

De el is hanyagolhatják a tanulók a felhajtóerőt, és akkor a

$$a = g - \frac{CA\rho_{\text{lev}}}{2m} v^2$$

Ezzel az összefüggéssel számol a leíráshoz mellékelt Excel program.[2]

Mivel gömb alakú testekről lesz szó, ezért a homlokfelületet az R sugarú gömb esetében a πR^2 összefüggéssel számolhatjuk ki. A tömeg a gömb térfogata és sűrűsége segítségével fejezhető ki. Írjuk be ezeket is, és jelöljük B-vel!

---

2 A feladathoz tartozó Excel-adatbázis az MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport honlapjáról tölthető le: http://edu.u-szeged.hu/ttkcs/

$$B=\frac{CA\rho_{\text{közeg}}}{2m}=\frac{C\rho_{\text{közeg}}\pi R^2}{2\frac{4\pi}{3}R^3\rho_{\text{test}}}=\frac{3C\rho_{\text{közeg}}}{8R\rho_{\text{test}}}=0{,}16875\frac{\rho_{\text{közeg}}}{R\rho_{\text{test}}}$$

tehát

$$a=g-0{,}16875\frac{\rho_{\text{közeg}}}{R\rho_{\text{test}}}v^2$$

A mellékelt Excel programban változtatni lehet a közeg és az eső testek sűrűségét és a golyók sugarát (sárga mezők). Az adatokat SI-ben kell beírni, a sűrűséget $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$-ben, a sugarat m-ben.

A v^2-nek a sárga mezők adataiból kiszámított együtthatóját a narancssárga mező mutatja (I3 és O3).

A közeg sűrűségét állandónak tekintjük, de természetesen nagy magasságok esetében ez már nem tehető meg. A sűrűség exponenciálisan csökken a felszíntől távolodva, 5,5 km-enként feleződik. Egy ezt is figyelembe vevő szimuláció és jelenség olvasható Stonawski Tamás (2019) írásában.

Nem foglalkozunk a nehézségi gyorsulás magasságtól való függésével sem. Az elért maximális sebesség egyszerűen számítható, amikor a gyorsulás 0 lesz, $a = 0$. A program 0,1 s időközönként számolja ki az új gyorsulást, abból a sebességet, majd az időtartam kezdeti és végsebességének középértéke segítségével az elmozdulást.

A téma feldolgozásának lehetséges lépései[3]

- A Galilei-féle és az arisztotelészi elképzelés különbözőségének megbeszélése.
- Hogyan esnének a testek vákuumban?
- Hogyan esnek a testek levegőben? A légellenállás szerepe.
- Videók keresése a témakörben.
- Excel program tanulmányozása különböző esetekben differenciált csoportmunkában, feladatlappal. A feladatlap módosítható, ki lehet hagyni belőle, az egyes csoportok különböző feladatokat kaphatnak.
- A tapasztalatok megbeszélése.

3 A program kipróbálásából szakdolgozat készült. Sudár Mariann (2019). *Újszerű oktatási módszerek alkalmazási lehetőségei a fizikatanításban.* ELTE, TTK.

Lehetséges tanulói feladatok

- Ismerkedjetek meg a mellékelt Excel programmal! Változtassátok a lehetséges paramétereket (sárga mező)! Figyeljétek meg, hogyan változnak a mozgást jellemző egyes függvények!
- Hasonlítsátok össze egy *vákuumban* és egy *levegőben* mozgó azonos sűrűségű anyagból készült és azonos térfogatú (vagyis két egyforma) golyó mozgását!
- Hasonlítsátok össze *két azonos anyagból készült,* de különböző térfogatú (sűrűségek azonosak, sugarak különbözőek) golyó mozgását! Mire számítotok? Írjátok le, majd nézzétek meg a grafikonokat!
- Hasonlítsátok össze *két azonos sugarú, de különböző anyagból* készült golyó mozgását! Mit vártok? Írjátok le, majd nézzétek meg a grafikonokat!
- Hogyan változik a golyók egymáshoz viszonyított távolsága az idő függvényében?
- Mennyi idő múlva lesz legalább *x* cm (válasszatok hosszúságot) a különbség a két golyó között? Mekkora utat tett meg addig a 2. számú golyó?
- A közeg sűrűségének és a gyorsulás nagyságának változtatásával *különböző égitestekre* is képzelhetitek magatokat (Hold, Mars). Hasonlítsatok össze ilyen eséseket!

Gondoljátok át, hogy az egyes esetekben hogyan lehet *közelíteni* a golyók mozgását!

- Mely esetekben lehet azt mondani, hogy a két testet gyakorlatilag egyszerre látjuk leérkezni? Állítsatok be ilyeneket!
- Ténylegesen elhanyagolható-e a golyóra ható felhajtóerő a mozgás leírása során?
- Milyen közelítéseket alkalmaz az Excel program a mozgás leírásához? Mit gondoltok, ez meddig tehető meg?

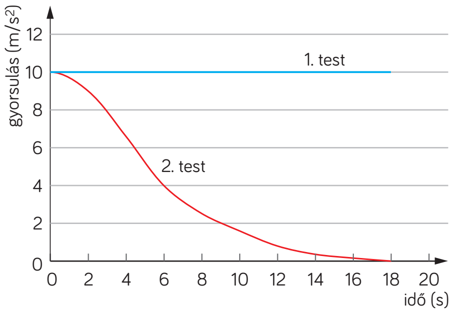
Milyen *további függvényeket* lehetne még ábrázolni? Próbálkozzatok meg az ábrázolással! Előtte gondoljátok végig, milyen lehet a függvény menete!

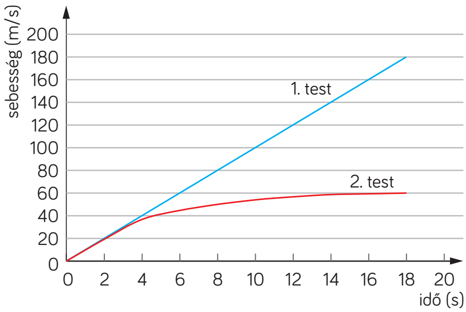
Lehetséges megoldások

Egy *vákuumban* és egy *levegőben* mozgó azonos sűrűségű anyagból készült és azonos térfogatú (vagyis két egyforma) golyó mozgása

A kiindulási adatok legyenek a következők **(11. ábra)**:

	változó paraméterek:		
B1	golyó sűrűsége	7800	vas
	közeg sűrűsége	0	vákuum
	golyó sugara (m)	0,01	
B2	golyó sűrűsége	7800	vas
	közeg sűrűsége	1,3	levegő
	golyó sugara (m)	0,01	





11. ábra Vasgolyó mozgása vákuumban és levegőben

Két azonos anyagból készült, *különböző méretű,* gömb alakú, vagy gömbbel közelíthető test mozgásának vizsgálata.

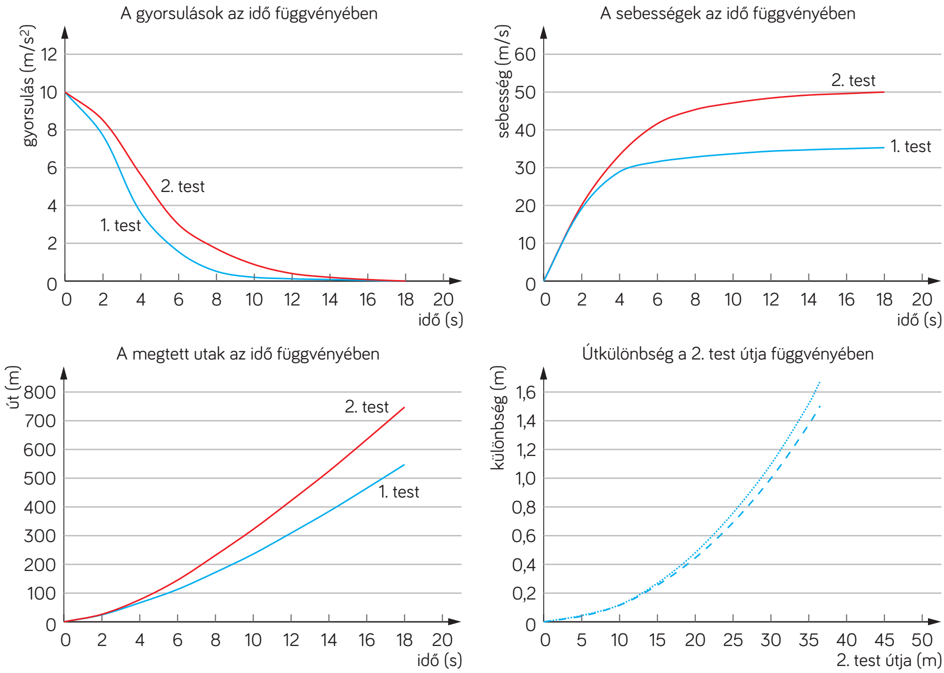
A kiindulási adatok legyenek a következők **(12. ábra)**:

	változó paraméterek:		
B1	golyó sűrűsége	1100	kis paradicsom
	közeg sűrűsége	1,3	levegő
	golyó sugara (m)	0,025	
B2	golyó sűrűsége	1100	nagyobb paradicsom
	közeg sűrűsége	1,3	levegő
	golyó sugara (m)	0,05	

12. ábra Két paradicsom adatai

A nagyobb paradicsom sugara kétszerese a kisebbéhez viszonyítva, ezért a térfogata és a tömege is $2^3 = 8$-szoros.

Látható, hogy 5 m-ről való esés esetében nagyon kicsi különbség van a megtett utak között. Ez alig 3 cm, és közel 1 s az esési idő. Tehát gyakorlatilag azt mondhatjuk, hogy egyszerre érnek földet **(13. ábra)**.

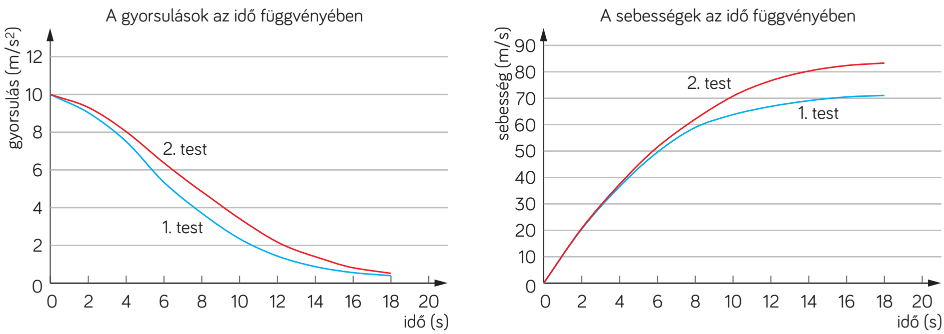


13. ábra A két paradicsom mozgásának összehasonlítása

Két azonos méretű, de különböző anyagból készült golyó mozgása

A kiindulási adatok legyenek a következők **(14. ábra)**:

	változó paraméterek:		
B1	**golyó sűrűsége**	**7800**	**vas**
	közeg sűrűsége	**1,3**	**levegő**
	golyó sugara (m)	**0,015**	
B2	**golyó sűrűsége**	**11300**	**ólom**
	közeg sűrűsége	**1,3**	**levegő**
	golyó sugara (m)	**0,015**	



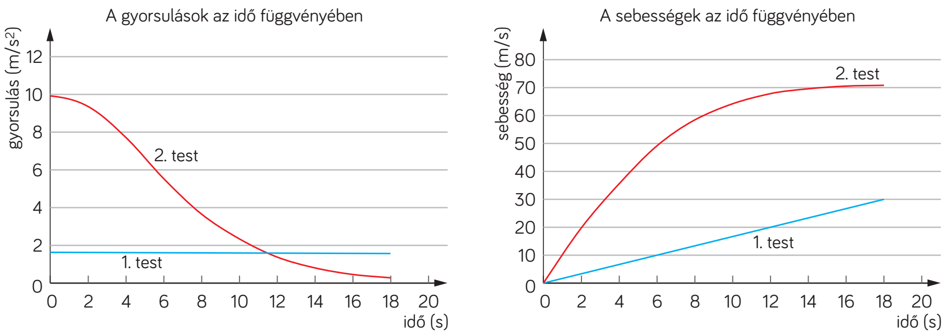
14. ábra Két azonos méretű, de különböző anyagból készült golyó mozgása

KÜLÖNBÖZŐ ÉGITESTEKEN MOZGÓ GOLYÓK

A kiindulási adatok legyenek a következők **(15. ábra)**:

	változó paraméterek:			
B1	golyó sűrűsége	7800	vas	
	közeg sűrűsége	0	vákuum	Hold
	golyó sugara (m)	0,015		
B2	golyó sűrűsége	7800	vas	
	közeg sűrűsége	1,3	levegő	
	golyó sugara (m)	0,015		

	1. test			
	t (s)	a (m/s²)	v (m/s)	s (m)
kezdeti feltételek:	0	1,635	0	0
	0,1	1,635	0,1635	0,008175



15. ábra Két különböző bolygón mozgó test mozgásának összehasonlítása

Nagyon sokféle egyéb beállítási lehetőség van. Ki lehet próbálni különböző sűrűségű anyagok esését levegőben. Például fa- és vasgolyók ejtése, melyet Hevesen ki is próbáltak a Víztorony tetejéből (Kis, 2011). Lehet a méreteket változtatni. De arra figyeljünk, hogy *egyszerre csak egy paramétert változtassunk*. Tehát az összehasonlított két esetnél csak egy paraméter legyen különböző. Át is lehet írni a program egyes részeit. Lehet például finomabb felbontást csinálni, nem 0,1 s-onként számoltatni, hanem például 0,05 s-onként stb.

Az útkülönbség-grafikonok tanulmányozásából látható, hogy a körülbelül 5 m magasról leejtett tárgyak esetében az útkülönbség elhanyagolható normál földi körülmények között. Még 30 láb, ami körülbelül 10 m, esetében sem túl nagy, mely magasságból Stevin végezte az ejtési kísérletét. De a pisai ferde torony esetében már méteres különbségek lehetnek. Ezért többen azt gondolják, hogy Galilei nem valószínű, hogy ejtett volna ki tárgyakat a toronyból. Bár természetesen a különbség a légellenállásnak tudható be, és közel sem 10-szeres a tízszeres tömegkülönbségek esetében.

A FELHAJTÓERŐ VIZSGÁLATA

A foglalkozás jellemzői

20' 9.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Kísérleti vizsgálat: Mitől függ és mitől nem függ a felhajtóerő?

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, kutatási készségek

Fejlesztett tartalmi tudás:
Arkhimédész törvénye, felhajtóerő

Fejlesztett procedurális tudás:
A kísérleti eszközök megfelelő használata.

Eszközök, anyagok:
füzet, íróeszköz, erőmérő, főzőpohár, különböző térfogatú és anyagú, kampóval ellátott testek (fa, vas, réz, alumínium), arkhimédészi hengerpár (alumíniumhenger és edény, melybe pontosan beleillik), kétkarú mérleg, okostelefon, víz, glicerin

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket:

- fogalmak: tömeg, sűrűség, nehézségi gyorsulás, erő, súlyerő, nehézségi erő;
- a gyorsulás és az erő kapcsolata, Newton II. törvénye;
- több erő hatása egy testre, eredő erő;
- rugós erőmérő használata.

A felhajtóerő fogalmának megismerésén kívül fontos célkitűzés Newton II. törvényének elmélyítése, amikor egy testre több erő hat, és ezek eredője határozza meg a mozgását.

Problémafelvetés

- Fürdés közben a vízben könnyebbnek érezzük magunkat. Miért van ez?
- Földrajzórán azt tanultuk, hogy a meleg levegő felszáll. Miért van ez?
- Miért tud felszállni a repülőgép? Ez ugyanaz a típusú felhajtóerő, mint ami miatt a vízben könnyebbek vagyunk?
- Miért tudnak a madarak repülni?

Lehetséges kutatási kérdés: Mitől függ, és mitől nem függ a testekre ható felhajtóerő?

A közös megbeszélés során a következő tényezőkre érdemes kitérni és a táblán is rögzíteni. Függ-e a felhajtóerő nagysága például:

- a test alakjától;
- a test térfogatától;
- a test tömegétől;
- a test sűrűségétől;
- a folyadék, vagy a gáz sűrűségétől, amelybe a test belemerül?

A diákok a megbeszélés után differenciált csoportmunkában vizsgálják meg az egyes tényezők hatását! Válaszon a csoport egy vizsgálni kívánt tényezőt, alkossanak hipotézist, készítsenek vizsgálati tervet a rendelkezésre álló eszközöket figyelembe véve, majd miután a tanárral egyeztették a tervet, végezzék el a vizsgálatot.

Lehetséges táblázat az adatok rögzítéséhez (**7. táblázat**):

A vízbe merülő test	A test súlya levegőben (N)	A test súlya vízben (N)	Felhajtóerő vízben (N)	A test súlya glicerinben (N)	Felhajtóerő glicerinben (N)
alumínium-henger					
vashenger					
rézhenger					
alumínium téglatest					
kétszeres tö-megű alumíni-um téglatest					
háromszoros tömegű alumí-nium téglatest					

7. táblázat Az adatok rögzítése

Arkhimédészi hengerpárral különböző anyagú hengerek esetében is érdemes elvégezni a kísérleteket. Ha a hengerpár alsó része teljesen a víz/glicerin alá kerül, akkor a felső üres hengert színültig kell megtölteni vízzel/glicerinnel ahhoz, hogy az erőmérő akkora értéket mutasson, mint a levegőben lévő henger esetében. Mindegy, hogy milyen anyagú az alsó tömör henger, alumínium, vas vagy réz.

Fontos, hogy ne csak vízben vizsgálják a tanulók a felhajtóerőt! Sőt, célszerű azt is megbeszélni, hogy az gázokban is, vagyis a levegőben lévő testekre is hat.

Lehetséges további vizsgálandó problémák

- Mitől függ az, hogy egy test egy adott folyadékban *elmerül, úszik* vagy *lebeg*? Gondolkodjatok el azon, hogy ezt miként tudnátok megvizsgálni és bemutatni egymásnak!
- Mit lehet tenni, ha azt szeretnénk elérni, hogy egy, az adott folyadékban elmerült test lebegjen, illetve ússzon? Gondolkodjatok el azon, hogy ezt miként tudnátok megvizsgálni, és bemutatni egymásnak!
- Miként változik egy folyadékban úszó test esetében a folyadékból kint lévő rész nagysága, ha elkezdjük növelni a folyadék sűrűségét? Például vízben egyre több cukrot vagy konyhasót oldunk fel (Radnóti & Adorjánné Farkas, 2015).

A rendelkezésetekre álló eszközök, anyagok: főzőpohár, kanál, keverőbot, vonalzó, okostelefon, víz, konyhasó, cukor, különböző zöldségek, gyümölcsök, főtt tojás.

Gondolkodtató kérdések

- Mérhetnénk-e felhajtóerőt a Holdon?
- Van-e felhajtóerő a világűrben?

A SÚRLÓDÁS VIZSGÁLATA

A foglalkozás jellemzői

135' 7–9.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
A tanulók a súrlódás témát dolgozzák fel több kisebb saját kutatás elvégzése révén. Az egyes tartalmi egységek önállóan is feldolgozhatók, bár azok egymásra épülnek.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
arányossági gondolkodás, összehasonlítás, oksági gondolkodás, kutatási készségek: hipotézisalkotás, változók azonosítása és kontrollja, vizsgálat tervezése, végrehajtása, a tapasztalatok alapján következtetés

Fejlesztett tartalmi tudás:
a mechanikai tudásrendszer, a newtoni szemléletmód elemeinek bővítése, erőtörvények

Fejlesztett procedurális tudás:
kísérleti elrendezések megalkotása és megfelelő használata a vizsgálódások során

Eszközök, anyagok:
mechanikai tanulókísérleti készlet, rugós erőmérő, kampóval ellátott, lehetőleg tégla alakú testek, különböző felületek (fa, smirgli, sztaniolpapír, filc, fémfelület stb.)

A foglalkozás szerzője: Adorjánné Farkas Magdolna

A *csúszási súrlódási* erő akkor lép fel, amikor két egymással érintkező fizikai test egymáshoz képest elmozdul. A mindennapi életben sokszor tapasztaljuk a súrlódás meglétét vagy éppen a hiányát.

Problémafelvetés

Mikor csúszik jobban a szánkó?

- Frissen esett havon vagy jeges úton?
- Havon vagy kavicsos úton?

Mikor tud a pálya végén rövidebb úton lefékezni a síelő

- ha lekopott a hó a pályáról vagy ha jeges a pálya?

Mindegyik esetben magyarázd meg, hogy mi a különbség oka!

Ha ónos eső esik, és nagyon csúsznak az utak, néhány ember frottír zoknit húz a cipőjére, hogy ne csússzon el gyaloglás közben. Mit gondolsz, miért segíthet a zokni? Ha egy vízszintes úton meglökünk egy ládát, az először elindul, csúszik egy ideig, majd megáll. Mi állítja meg?

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket:

- egyenes vonalú egyenletes mozgás, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás ismerete és mérési lehetőségei;
- sebesség, gyorsulás, tömeg, erő, súlyerő fogalmak ismerete;
- az erők eredőjének meghatározása, és annak ismerete, hogy több erőhatás együttes eredményeként miként mozog a test;
- rugós erőmérő használata.

A SÚRLÓDÁSI ERŐ VIZSGÁLATA

Lökjetek el vízszintes asztallapon egy hasábot! Mit tapasztaltok?

Várt válasz: Csökken a sebessége, majd megáll.

Segítő kérdések: Mi csökkenti a sebességét?

Várt válasz: A hasáb és az asztallap között fellépő súrlódási erő.

Hogyan tudjuk megmérni ezt az erőt?

Várt válasz: Vízszintes asztallapon rugós erőmérővel úgy kell húzni a tárgyat, hogy az egyenletesen mozogjon. Az erőmérő által kifejtett húzóerő ebben az esetben kiegyenlíti a súrlódási erőt. Tehát a rúgós erőmérő által mért erő nagysága megegyezik a súrlódási erő nagyságával.

Fel kell hívni a tanulók figyelmét arra, hogy az asztallappal párhuzamosan, tehát vízszintesen húzzák a hasábot.
Az erő mérésére másféle módszer is eszébe juthat néhány diáknak. Ha elegendő nagyságú sebességgel ellökjük a testet, az bizonyos út megtétele után megáll. Mérni kell ezt az utat és a mozgás idejét. Ebből lehet számolni a gyorsulást (lassulást), melyet megszorozva a test tömegével, megkapjuk a súrlódási erőt. Ha felvetődik ez a gondolat, akkor érdemes hagyni, hogy az egyik csoport így mérjen.

Rajzoljátok fel az egyenletesen mozgó tárgyra ható erőket!
Mi az oka annak, hogy súrlódási erő lép fel a két felület között?

Várt válasz: A súrlódás oka a felületek egyenetlensége, valamint az érintkező felületek atomjainak egymásra ható vonzása.

Kutatási kérdés I.

Mitől és hogyan függ a *csúszási súrlódási* erő értéke?

A tanulói vizsgálat fő lépései a következők lehetnek:

- Fogalmazzátok meg a *hipotézist*!
- *Tervezzetek olyan kísérletet,* amellyel igazolni vagy cáfolni tudjátok a hipotéziseteket! Gondoljátok végig, hogy *milyen adatot mérnétek meg,* és *milyen körülményeket változtatnátok*! A kísérlet során ügyeljetek arra, hogy egyszerre csak egy körülményt változtassatok meg! A vizsgálatok körülményeinek rögzítéséhez készítsetek táblázatot!
- Válogassátok össze azokat az eszközöket, amelyeket fel tudtok használni a méréseknél!
- Végezzétek el a méréseket!
- Írjátok bele a táblázatba a mérési eredményeket!
- Fényképezzétek le a megvalósított vizsgálatokat!
- Vonjátok le a következtetést a mérések eredményei alapján!
- Hasonlítsátok össze a mérési eredményeket az általatok felállított hipotézissel!

Ha nem igazolták a hipotézist a mérési eredmények, adjatok rá magyarázatot, hogy mi lehet ennek az oka!

Megoldási lehetőségek

Befolyásoló tényezők lehetnek:

- az asztalfelület érdessége/simasága;
- a hasáb felületének érdessége/simasága;
- a hasáb súlya;
- a hasáb felületének nagysága.

Lehetséges tanulói hipotézisek

A) Minél érdesebb az asztal felülete, annál nagyobb a súrlódási erő.

B) Minél érdesebb a hasáb felülete, annál nagyobb a súrlódási erő.

C) Minél nagyobb a hasáb súlya, annál nagyobb a súrlódási erő.

D) Minél nagyobb a hasáb felülete, annál nagyobb a súrlódási erő

Megjegyzés az utolsóként felírt hipotézishez: nem baj, ha a hipotézisek között olyan is szerepel, amelynek igazságát nem igazolják a kísérletek. Sőt, kifejezetten hasznos, ha a tanulók azt is megtapasztalják, hogy a kísérlet nem igazolja minden esetben a hipotézist. Érdemes arra is kitérni, hogy ez a tudósokkal is gyakran előfordul kutatómunkájuk során. Ilyenkor először meg kell vizsgálni, hogy nem volt-e hiba a kísérletben. Ha több mérés után is ugyanolyan eredményt kapnak, amely nem

igazolja a hipotézist, akkor valószínűleg a hipotézis nem volt helyes, így akkor azt kell felülvizsgálni.
Vannak olyan körülmények, amelyek kvantitatívan meghatározhatók (pl. felület nagysága, a hasáb súlya), és vannak, amelyeknél csak minőségi összehasonlítást tudunk tenni (pl. érdesség/simaság). Ennél a kísérletnél azonban azt javasoljuk, hogy a hasáb súlyánál, illetve a hasáb felületének nagyságánál is csak összehasonlítást tegyenek a tanulók.

Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani, hogyan függ a súrlódási erő a különböző tényezőktől, arra kell törekedni, hogy minden esetben ugyanakkora sebességgel csússzon a tárgy.

Érdemes felhívni a tanulók figyelmét, hogy valójában a hasábot a felülethez nyomó erő nagyságától függ a súrlódási erő. A nyomóerő csak abban az esetben egyezik meg a hasáb súlyával, ha a hasáb vízszintes talajon áll vagy mozog. Ha a hasábot lejtőre helyezzük, a nyomóerő kisebb lesz a hasáb súlyánál.

Javaslat a tanulói vizsgálatokhoz előkészített eszközökre

- sima felületű fahasábok – érdemes olyanokat kikészíteni, amelyek három oldalapja különböző területű
- sima felületű fémhasábok – érdemes olyanokat kikészíteni, amelyek három oldallapja különböző területű
- fémhasáb, amelynek az egyik oldallapjára csiszolópapírt, -vásznat vagy filcet ragasztottak
- rugós erőmérő
- különböző érdességű felületek, amelyeken a tanulók húzhatják a hasábot

A fényképek készítéséhez mobiltelefon is használható.

Javaslat a vizsgálati elrendezésekre

A **8. táblázat** a korábban megadott lehetséges tanulói hipotézisek sorrendjét követve mutat be néhány lehetséges vizsgálati körülményt. Az itt felsoroltakon kívül másféle kísérleti elrendezést is javasolhatnak a tanulók, és tovább lehet folytatni a kísérletet három hasábbal. Érdemes úgy szervezni a mérést, hogy egy-egy hipotézisnél többféle kombinációt, vizsgálati elrendzést is mérjenek a csoportok, illetve egy csoport több hipotézist is vizsgáljon meg.

A vizsgálatok tervezése során beszéljük meg tanulókkal, hogy mi kerüljön a táblázatba. Ha kevésbé gyakorlottak a diákok, megadhatjuk a táblázat fejlécét. Tisztázzuk, hogy hány változót (tényezőt) tudunk vizsgálni, azoknak milyen értékei lehetnek. Beszéljük meg, hogy ebben a vizsgálatsorozatban mi a függő változó, aminek a változását vizsgáljuk (a húzóerő nagysága), továbbá az egyes vizsgálatokban mi a független változó, mit változtatunk (hasáb felületének érdessége/asztal felületének érdessége/hasáb súlya/hasáb csúszófelületének nagysága), és melyek a kontrollált vagy állandó változók (hasáb felületének érdessége/asztal felületének érdessége/hasáb súlya/hasáb csúszófelületének nagysága). A táblázat kitöltése segíti a diákokat annak ellenőrzésében, hogy az adott vizsgálatban mindig csak egy tényezőt változtassanak meg.

A hipotézis jele	A vizsgálat sorszáma	A hasáb felületének érdessége	Az asztal-felület érdessége	A hasáb súlya (hasáb egységekben)	A hasáb csúszófelületének nagysága (oldallap)	A húzóerő nagysága (N)
A	1.	sima	sima	1	legnagyobb	
		sima	érdes	1	legnagyobb	
B	2.	sima	sima	1	legnagyobb	
		érdes	sima	1	legnagyobb	
B	3.	sima	érdes	1	legnagyobb	
		érdes	érdes	1	legnagyobb	
C	4.	érdes	érdes	1	legnagyobb	
		érdes	érdes	2	legnagyobb	
		érdes	érdes	3	legnagyobb	
D	5.	érdes	érdes	1	legnagyobb	
		érdes	érdes	1	közepes	
		érdes	érdes	1	legkisebb	
D	6.	érdes	érdes	2	legnagyobb	
		érdes	érdes	2	közepes	
		érdes	érdes	2	legkisebb	

8. táblázat Példák vizsgálati elrendezésekre a súrlódási erő nagyságát befolyásoló tényezőkre alkotott hipotézisek vizsgálatához (ahol 2 vagy 3 hasáb van, ott azok egymásra vannak téve)

Érdemes a két felület érdességére külön-külön figyelni, hiszen a mindennapi életben is mindkettőt figyelembe kell venni. Például az, hogy megcsúszunk-e a járdán, egyaránt függ a cipőtalpunk simaságától és a járda felületének csúszósságától.

Az érintkező felületek érdessége együttesen határozza meg a súrlódási együtthatót, amelynek μ a fizikai jele.

Következtetés
Várt válaszok:

- Az érdesebb felületnél nagyobb a súrlódási erő.
- Minél nagyobb a hasábok száma, annál nagyobb a hasábok súlya, és annál nagyobb a súrlódási erő. Ez azt jelenti, hogy egyenes arányosság van a súrlódási erő és a hasáb súlya között. Matematikai formában megadva: $\frac{F_{\text{súrlódási}}}{F_{\text{súly}}} = \text{állandó}$. Ez a hányados adja a μ értékét.
- A csúszó felület nagyságától nem függ a súrlódási erő.

Hipotézissel való összevetés
Mivel minden esetben több tanuló is feltételezni szokta, hogy a csúszó felület nagyságától is függ a súrlódási erő, érdemes megmagyarázni, hogy miért nem függ. Itt két hatás egyenlíti ki egymást: ha nagyobb az érintkező felület, akkor nagyobb felületen érvényesül a mozgást akadályozó hatás, azonban ezzel egyidejűleg a nyomás kisebb lesz, mert az erő nagyobb felületen oszlik el.

Kutatási kérdés II.
Hogyan lehetne meghatározni a *csúszási súrlódási* együttható értékét különböző felületek esetében?

Várt válasz: Meg kell mérni a súrlódási erőt az I. feladatban leírt módon.

A tanulók először mérjék meg a hasáb súlyát, amit úgy tudnak meghatározni, hogy az erőmérőre akasztják. Ezt követően mérjék meg a súrlódási erőt a különböző felületek esetén. Figyeljenek arra, hogy egyszerre csak egy körülményt változtassanak meg! Készítsenek táblázatot, majd írják be a mérési eredményeket! Számolják ki a súrlódási együtthatók értékét!

A két erő hányadosa a súrlódási együttható $\left(\frac{F_{\text{súrlódási}}}{F_{\text{súly}}} = \mu\right)$. Ügyeljenek arra, hogy mivel ez a fizikai mennyiség két erő hányadosaként számítható ki, ezért nincs mértékegysége.

Beszéljük meg azt is, hogy mi lehet a súrlódási együttható elméletileg legnagyobb, illetve legkisebb értéke. Várt válasz: 1 illetve 0. A gyakorlatban előforduló súrlódási együttható értékei e két szélsőérték közé esnek.

Javaslat a táblázatra
A **9. táblázat** a körülmények többféle lehetséges kombinációját mutatja. Az itt felsoroltakon kívül másféle kísérleti elrendezéseket is javasolhatnak a tanulók. Érdemes úgy szervezni a mérést, hogy minél többféle kombinációt mérjenek a csoportok.

A vizsgálat sorszáma	A hasáb felülete	Az asztal felülete	A súrlódási erő (N)	A hasáb súlya (N)	A súrlódási együttható
1.	sima acél	sima fa			
	sima acél	üveg			
	sima acél	posztó			
2.	filccel leragasztott	sima fa			
	filccel leragasztott	üveg			
	filccel leragasztott	posztó			

9. táblázat Lehetséges vizsgálati elrendezések a csúszási súrlódási erő mérésére különböző felületek esetén

Kiegészítő feladat: Mondjatok példát a hétköznapi életből arra, amikor a súrlódási erőnél figyelembe vehető nyomóerő független a test súlyától!

Várt válasz: Ilyen eset például az, ha egy függőleges falfelületet csiszolnak.

A TAPADÁSI SÚRLÓDÁS VIZSGÁLATA

Problémafelvetés: Bizonyára tapasztaltátok, hogyha elhúztok egy ládát vagy egy asztalt, a tárgy elmozdításakor nagyobb erőt kell kifejteni, mint akkor, amikor már egyenletes mozgásban tartjátok. Mi lehet ennek az oka?

Várt válasz: a test elmozdításakor nagyobb a súrlódási erő.
Ezt tapadási súrlódási erőnek nevezzük.

Kutatási kérdés
Mitől és hogyan függ a tapadási súrlódási erő maximumának értéke?

Lehet, hogy a tanulók a választ nem tudják maguktól megfogalmazni. Ebben az esetben rá kell őket vezetni. Vízszintes asztallapon rugós erőmérővel húzzuk a hasábot egyre nagyobb erővel. Az erőt növelve egyszer elérünk egy olyan értéket, amelynél megmozdul a hasáb. Lényeges és érdekes tulajdonsága a tapadási súrlódási erőnek, hogy 0 és a maximális érték között egyenletesen változik. Amíg a hasáb nem mozdul, addig a tapadási súrlódási erő egyenlő nagyságú a húzóerővel. A tapadási súrlódási erőnek van egy maximális értéke, ha a húzóerő ennél nagyobb lesz, akkor mozdul meg a hasáb. Tehát ezzel a méréssel a tapadási súrlódási erő maximumát lehet megmérni.

Hogyan lehet a tapadási súrlódási együtthatót megmérni különböző felületek esetében?

A tapadási súrlódási erő és a nyomóerő hányadosa a tapadási súrlódási együttható. A mérést a II. méréshez hasonlóan kell elvégezni.

A GÖRDÜLÉSI ELLENÁLLÁS VIZSGÁLATA

Ha egy test egy másikon legördül, akkor is fellép egy mozgást fékező erő, ezt gördülési ellenállási erőnek hívjuk. A gördülési ellenállási erő és a nyomóerő hányadosa a gördülési ellenállási tényező. Ennek a nagysága körülbelül a tizedrésze a csúszási súrlódási együtthatónak.

Kutatási kérdések
Hogyan lehet a gördülési ellenállást vizsgálni?
Hogyan lehet a gördülési ellenállási együtthatót megmérni?
A méréseket az előző feladatokhoz hasonlóan kell végrehajtani.

Kiegészítő feladat
Az autók kerekén másféle gumiabroncsot használnak nyáron, mint télen. Nézz utána, hogy miben térnek el egymástól! Indokold meg, hogy miért veszélyes, ha valaki olyan autóval közlekedik, amelyen kopottak a gumik!

Várt válasz
A téli abroncs mintázata sűrűbb és mélyebb, mint a nyárié, ezáltal minden irányban nagyobb tapadási súrlódási erőt biztosít, ezzel akadályozza meg az autó megcsúszását a havas, jeges úton. Ha kopott a gumi, csökken a mintázatok mélysége, és így kisebb lesz a maximális tapadási súrlódási erő.

Érdemes azt is megemlíteni, hogy a kétféle abroncs anyagának az összetétele is eltérő, a téli abroncs olyan anyagból készül, amely alacsony hőmérsékleten is rugalmas marad, így jobban tapad az útburkolathoz.

RUGALMAS TESTEK VIZSGÁLATA

A foglalkozás jellemzői

30' 9.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Különböző rugóállandójú rugók vizsgálata; erő–megnyúlás grafikon felvétele különböző esetekben.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, kutatási készségek, matematika- és informatikatudás transzferálása a fizikába

Fejlesztett további készségek:
függvények ábrázolása az Excel programmal, egyszerűsítési feltételek alkalmazása

Fejlesztett tartalmi tudás:
rugalmas testek jellemzői, rugóállandó fogalma

Eszközök:
füzet, íróeszköz, Bunsen-állvány, fogók, rudak a rugó felfüggesztéséhez, tükörskála, tömegelemek, melyek egymásba akaszthatók, mérleg, számítógép

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket:

- erő, nehézségi erő, súly;
- a gyorsulás és az erő kapcsolata, Newton II. törvénye;
- több erőhatás együttes eredménye.

Ráhangoló kérdés
Hol találkozhatunk a mindennapi életben rugalmas testekkel és rugókkal?

Problémafelvetés
A periodikus mozgások sokfélék, szinte áttekinthetetlen ez a mozgástípus. Egyszerűsítsük a munkánkat: vizsgáljunk csak rugalmas testeket, rugókat és gumiszálakat.

A csoportból mindenki vegye kézbe a megkapott rugót, illetve gumiszálat, s húzzátok ki azokat, de ne túlzottan nagy mértékben. (Az egyes csoportok különböző rugókat kapjanak! Ügyeljünk arra, hogy a rugó ne nyúljon meg véglegesen, ne menjen tönkre, a gumiszál ne szakadjon el.) Nyilván semmi újdonságot nem jelent számotokra, hogy ilyen viszonylag kis megnyúlások esetén minél nagyobb megnyúlást akarunk létrehozni, annál nagyobb erőt kell kifejtenünk. Mit mondhatunk erről az összefüggésről pontosabban?

Kutatási kérdés 1.

Hogyan függ a megnyúlás nagysága a rugóra/gumira kifejtett erő nagyságától?

A mérés tervezése előtt beszéljük meg a tanulókkal a következőket! Ha egy rugót egyik végénél felakasztunk, akkor a másik végére akaszthatunk különböző tömegű testeket. Ezek különböző mértékben nyújtják meg a rugót. Pontosabban a következő a helyzet: amikor a test a rugót megnyújtja, és a rugó éppen álló helyzetben van, akkor a rá ható erők eredőjének nullának kell lenni. Két erő hat a testre, lefelé húzza a nehézségi erő, ami a test tömegének és a nehézségi gyorsulásnak a szorzata: $G = mg$. Ez azt jelenti, hogy a rugónak felfelé is ekkora erőt kell gyakorolnia a testre. Vagyis a test tömegének mérésével meg tudjuk határozni a rugó által kifejtett erő nagyságát.

Lehetséges tanulói feladat

Beszéljétek meg a csoportban, hogy vajon milyen összefüggés lehet a rugó által kifejtett erő és a rugó megnyúlása között? Előzetes elképzeléseiteket – hipotéziseiteket – írjátok le a füzetetekbe!
Mit gondoltok, a többi csoport is pontosan azt kapja, mint ti? Indokoljátok a választ!

Tervezzétek meg a mérést, gondoljátok át a következőket!

- Mit mérnétek meg, és hogyan?
- Hogyan fogjátok rögzíteni a mérési adatokat?
- Mit minek a függvényében ábrázolnátok?
- Milyen függvényre számítotok?

A rendelkezésetekre álló eszközök:

Bunsen-állvány, fogók, rudak a rugó felfüggesztéséhez, tükörskála, tömegelemek, melyek egymásba akaszthatók, mérleg.

Egyeztessétek a mérési tervet a tanárotokkal, majd végezzétek el a mérést!
Fényképezzétek le a mérési berendezést!
Készítsétek el a mérés jegyzőkönyvét!

Lehetséges megoldás

Minden fizikai törvénynek vannak érvényességi kritériumai. Ténylegesen tökéletesen rugalmas alakváltozás nincs. Sok esetben azonban lehetséges jó közelítés. De meddig? A tanár előzetesen mérje meg, hogy hány tömegelemet lehet a rugóra akasztani anélkül, hogy az maradandó alakváltozást szenvedjen. Adja meg a tanulóknak ezt a számot. Érdemes arról is beszélgetni a tanulókkal, hogy van egy határ, amíg a rugó maradandó alakváltozás nélkül terhelhető.

Tanulói mérés

Bunsen-állványra függesszetek fel egy rugót, amely mellé méterrudat helyeztek. Ezen jelöljétek meg a rugó aljának helyét. Ezt követően akasszatok rá az egymásba akasztható tömegelemek közül egyet, majd olvassátok le a rugó megnyúlását (Δl) a kiindulási helyzethez viszonyítva. Akasszatok egyre több tömegelemet egymásba, és minden esetben olvassátok le a rugó megnyúlását a kiindulási helyzethez képest. Foglaljátok táblázatba a kapott adatokat, majd ábrázoljátok a megnyúlást a rugó által kifejtett erő függvényében!

Olyan grafikont kaptatok, amilyet vártatok? Indokoljátok meg a választ!

Egy tömegelem tömege: $m =$ ______ kg.

Egy tömegelemre ható nehézségi erő: $G = m \cdot g =$ ______ N.

Lehetséges táblázat (**10. táblázat**):

A mérés sorszáma	A tömegelemek száma	A rugó által kifejtett erő nagysága F (N)	Megnyúlás Δl (m)	$\frac{F}{\Delta l}$ $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$

10. táblázat A mérési eredmények számára

Ideális esetben a táblázat utolsó oszlopában közel ugyanazok az értékek szerepelnek egy adott rugó esetében. A tanulók hasonlítsák össze az egyes csoportok által kapott eredményeket! Az eredményekből látható, hogy egy rugó esetében a rugó által kifejtett erő nagyságának és a megnyúlásnak a hányadosa állandó, s ez a rugóra jellemző adat. Ezt a rugóra jellemző adatot rugóállandónak nevezzük, jele D, a mértékegysége N/m. Ez függ a rugó geometriájától is, nem csak a rugó anyagától.

A grafikon elkészítése lehetőleg az Excel program segítségével történjen. Írassák ki a diákok az illesztett egyenes egyenletét is, melyből olvassák ki a keresett rugóállandót!

Lehet több grafikont is ábrázolni ugyanabban a koordináta-rendszerben, hogy látszódjon a különbség az egyes rugók rugóállandója között.

Kutatási kérdés 2.
A gumiszál hasonlóan „viselkedik", mint a rugó. Vajon ez tényleg így van?

Tervezzetek meg – az előzőhöz hasonlóan – egy mérést, amelynek eredményei alapján válaszolni tudtok erre a kérdésre! A mérésről készítsetek jegyzőkönyvet!

A gumiszál vizsgálata lehet differenciált feladat. Ha a tanulók ténylegesen nem is végzik el a mérést, akkor is fontos annak megtervezése, és annak megbeszélése, hogy milyen függvényre számítanak. Fontos annak belátása, hogy az *nem lineáris* függvény!

További érdekes kérdés lehet, hogy ha a rugó végére akasztott tömeget lefelé elmozdítjuk, majd elengedjük, milyen mozgást fog végezni? A test harmonikus rezgőmozgást végez.

Kutatási kérdés 3.
Mitől és hogyan függhet a rugóra akasztott testből és a rugóból álló rendszer rezgésének a rezgésideje?

Tisztázni kell a tanulókkal, hogy mit értünk egy teljes rezgés alatt, mi a rezgésidő. Általában a felét szokták venni.

- A tanulók előzetesen alkossanak erről hipotézist.
- Gondolkodjanak el azon, hogyan mérnék meg a rezgésidőket.
- Hogyan elemeznék a mérési adatokat?
- Hogyan válaszolnának a feltett kérdésre?

Lehetséges hipotézisek
A rezgésidő függ

- a rugóra akasztott test tömegétől,
- a rezgés amplitúdójától,
- a rugó rugóállandójától.

A **kísérlet megtervezéséhez,** a mérésekhez a következőket célszerű átgondolni:

- Hogyan lehet az egyes hipotéziseket vizsgálni?
- Milyen mennyiségeket kell mérni, mivel és hogyan?
- Hogyan célszerű az adatokat rögzíteni?
- Az összefüggések felismeréséhez milyen grafikont célszerű elkészíteni?
- Mi szerepeljen a grafikon vízszintes és függőleges tengelyén?
- Milyen függvényt lehet illeszteni a mérési adatokat jelképező pontokra?

Az előző mérésekhez tartozó eszközlistát időmérővel kell kibővíteni. Az időt lehet mérni mobiltelefonnal vagy stopperrel. De a számítógép is használható. Fel lehet venni a mozgásokat, majd kiértékelni (Nagy & Radnóti, 2014b).

Az egyes csoportok az előző méréssorozathoz kapott különböző rugókat továbbra is használhatják. A rugóállandótól való függés vizsgálható a csoportok megfelelő adatainak (azonos tömegek) összehasonlításával.

Az amplitúdótól való függést érdemes a különböző tömegek esetében megnézni. A mérés megkezdése előtt célszerű a tanulókkal megbecsültetni, hogy mekkora rezgésidőt várnak. Majd rávezetni őket arra, hogy pontosabb eredményt kapnak, ha több rezgés idejét mérik. Mivel a rezgés csillapodik, nem biztos, hogy 10 rezgés idejét meg lehet mérni.

EXOBOLYGÓK – ÚJ TUDOMÁNYOS FELISMERÉS

A foglalkozás jellemzői

45'

9.

Kulcsfogalmak:
Naprendszer, csillag, bolygó, exobolygó, Kepler 3. törvénye.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Friss, új tudományos felfedezés felhasználása a fizika oktatásában annak bemutatására, hogy a közoktatás során tanultak segítségével miként lehet a tudományos híreket értelmezni. A tanult törvények felhasználásával, alkalmazásával kell megbecsülni a cikkekből kiolvasható adatok segítségével a vörös törpecsillag tömegét.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
arányossági gondolkodás, analógiás gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
szövegértés; függvény paraméterének felhasználásával számítás elvégzése

Fejlesztett tartalmi tudás:
a mechanikai tudásrendszer és a newtoni szemléletmód elemeinek bővítése, a csillagászati ismeretek elmélyítése

Fejlesztett procedurális tudás:
kutatási módszerek megismerése, a kutatás lépéseinek azonosítása

Eszközök:
fénymásoló papír, füzet, íróeszköz, számológép, számítógép

A feldolgozás lépései

- A téma bevezetése
- Az internetes híradás szövegének elemzése kérdéseken keresztül
- A vörös törpe tömegének kiszámítása háromféle módon
- További exobolygókról szóló híradások figyelése, elemzése, hasonló számítás elvégzése

Az iskolai feldolgozások során az internetes szöveget a diákoknak otthon kellett elolvasni, majd a kérdésekre a tanórán válaszoltak egyénileg, amit utána közösen megbeszélték. A szöveget kissé átalakítottuk a diákok számára.

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket:

- az egyenletes körmozgás kinematikai és dinamikai leírása;
- erő, nehézségi erő, súly;
- a gyorsulás és az erő kapcsolata, Newton II. törvénye;
- a Newton-féle gravitációs erőtörvény, Kepler-törvények.

A hét törpe meg a vörös törpe

A TRAPPIST-1 nevű rendszerben először 2015-ben találtak bolygókat a belga fejlesztésű, Chilében található TRAPPIST távcsővel vizsgálódó csillagászok. Ahogy a neve is mutatja, ez volt az első bolygórendszer, amelyet a Liege-ből irányított robotikus optikai teleszkóppal felfedeztek a szakértők. Az első bolygókat, szám szerint hármat 2016-ban jelentették be. Ezekre a fedési módszerrel akadtak rá a kutatók, vagyis a csillag fényességét vizsgálták, és azt nézték, hogy ebben megfigyelhetők-e olyan periodikus elhalványodások, amelyeket tőlünk nézve a csillag korongja előtt áthaladó bolygók okoznak.

Ez elméletben nagyon egyszerűen hangzik, de a valóságban jóval bonyolultabb. Egyrészt nagyon aprócska fényváltozásokat kell észrevenni, hiszen a legnagyobb bolygók sem képesek 1 százaléknál nagyobb mértékben halványítani csillaguk látszó fényességét. Másrészt nemcsak a bolygók okozhatnak átmeneti halványodásokat, hanem egy sor más tényező is, például a csillag saját aktivitási ciklusa. Harmadrészt a periodikus halványodások azonosítása rögtön nagyon bonyolulttá válik, ha nem egy bolygó okozza ezeket, hanem kettő vagy még több.

Ezen tényezők együtteséből adódik, hogy a legtöbb fedési módszerrel felfedezett extraszoláris bolygó úgynevezett forró jupiter, vagyis olyan planéta, amely csillagához képest viszonylag nagy méretű, és nagyon közel kering a központi égitesthez, így gyakran átvonul előtte, ezért rövid idő alatt is észre lehet venni. A TRAPPIST–1 esetében az volt a szakértők szerencséje, hogy egy nagyon pici és hideg csillag található a rendszer központjában. Az égitest egy M8 színképosztályú vörös törpe, vagyis tömege mindössze 8 százaléka, a sugárzási teljesítménye pedig kétezrede a Napénak. A TRAPPIST–1 tehát alig nagyobb a Jupiternél, és felszíni hőmérséklete 2550 K körüli, szemben a Nap 5778 K-es hőmérsékletével.

Ha egy másik rendszerből vizsgálnánk a Föld bolygó Nap előtti átvonulását, 0,01%-os csökkenést tapasztalnánk csillagunk látszó fényességében. Ha viszont egy ugyanilyen bolygó tőlünk nézve a TRAPPIST-1 előtt vonul át, jóval nagyobb, körülbelül 1 százalékos látszó fényességcsökkenést eredményez. Ekkora ingadozást pedig sokkal könnyebb észlelni, még akkor is, ha nagyon halvány az adott csillag. A TRAPPIST–1 esetében ráadásul a sikerhez az is hozzájárult, hogy csillagászati léptékben nagyon közel található: mindössze 40 fényévnyire van tőlünk, a Vízöntő csillagképben.

Ahogy az előzőekből kiderült, a fényesség ingadozásának mértékéből a csillag méretének ismeretében az átvonuló bolygók nagysága is megállapítható. A TRAPPIST–1 első három felfedezett bolygója ez alapján a Földdel egyező nagyságúnak tűnt, a csillagászok ugyanakkor azt is rögtön észrevették, hogy valami nem egészen stimmel a rendszerben. Az átvonulások ugyanis nem teljesen szabályosan követték egymást, hanem egy kicsit mindig eltértek a várttól. Ez pedig azt jelentette, hogy a csillag körül más bolygók is lehetnek, amelyek gravitációja hat az ismert égitestek haladására, enyhén megváltoztatva keringési idejüket.

Amikor ez világossá vált, a szakértők rögtön elkezdtek újabb bolygók után kutatni (ezúttal még érzékenyebb távcsövek, a Spitzer és a VLT segítségével), és rövidesen négy másik planétára is ráakadtak. A TRAPPIST–1 körül tehát összesen hét bolygó kering (legalábbis jelenleg ennyit ismerünk), amelyek mindegyike durván a Földhöz hasonló méretű. A legkisebb (TRAPPIST–1h, vagyis a legkülső égitest) átmérője nagyjából 75 százaléka a bolygónkénak, a legnagyobb (TRAPPIST–1g, az előző belső szomszédja) pedig 1,27-szeres földátmérővel rendelkezik. Ami a tömegeket illeti, a legkönnyebbnek a rendelkezésre álló adatok alapján a harmadik bolygó (TRAPPIST–1d) tűnik 0,41-szeres földtömegével, a legnehezebb pedig ennek belső szomszédja (TRAPPIST–1c) lehet, amely 1,38-szor annyit nyom, mint saját bolygónk.

A fényességadatokból kiderül még egy fontos adat, abból ugyanis, hogy mennyi ideig tart egy-egy bolygó átvonulása, következtetni lehet keringési idejének hosszára. Ebből pedig az is kiderül, hogy milyen messze van a csillagtól, mivel a távolabbi bolygók lassabban, a közelebbiek gyorsabban jutnak át a központi égitest korongja előtt. Ami a TRAPPIST–1 rendszerét illeti, ebben mind a hét ismert bolygó közelebb van csillagához, mint a Merkúr a Naphoz. A legbelső égitest mindössze másfél földi nap alatt ér körbe pályáján, a legkülső pedig 14–25 nap alatt.

A bolygók azonban közelségük ellenére sem annyira forrók, mint a Merkúr, hiszen a csillag sokkal kevesebb energiát bocsát ki, mint a Nap. Ami azt illeti, felszínükön egészen kellemes lehet a hőmérséklet. Bár a tényleges körülményeket a légköri viszonyok ismerete nélkül nehéz megítélni, és az élhetőség kritériumaival kapcsolatban is akadnak viták, a számítógépes modellek szerint a hétből legalább három bolygó (TRAPPIST–1e, f és g) megfelelő távolságban van csillagától ahhoz, hogy felszínén folyékony állapotú víz létezhessen.

Ha valaki a bolygók egyikének felszínén állna, valószínűleg nagyon gyenge fényviszonyokkal találkozna: csak egy kicsit lenne világosabb, mint egy teliholdas éjszakán. A központi csillag ugyanakkor sokkal nagyobbnak látszana, mint a Nap a Földről, mondja Amaury H. M. J. Triaud, a felfedezést tevő kutatócsoport egyik tagja. A TRAPPIST–1f-ről például háromszor olyan szélesnek látszana a csillag korongja, mint amekkora bolygónkról tekintve a Nap. Hogy milyen színűnek tűnne a csillag, arról megoszlik a szakértők véleménye. Mivel energiája nagy részét az infravörös tartományban sugározza ki, emberi szemmel nézve (nem számolva az aktuális bolygó légkörének összetételével) valószínűleg a narancsvörös valamelyik árnyalatában látnánk a korongot.

Hogy tudnánk-e létezni ezeken a bolygókon? Ez egy olyan kérdés, amire jelenleg nincs válasz. Ami a bolygók tömegét illeti, egyelőre csak nagyon durva becslések állnak rendelkezésre az alapján, hogy mennyire „rángatják" egymást, ahogy körbe-körbe haladnak a pályájukon. Pontos adatok hiányában pedig nehéz megítélni, hogy mekkora sűrűségűek és miből állhatnak a planéták, valamint hogy van-e egyáltalán légkörük. Vagyis pillanatnyilag fogalmunk sincs, hogy valójában mennyire földszerűek ezek a bolygók. Tény, hogy méretre nagyjából akkorák, mint saját planétánk, de nem tudjuk, milyen az összetételük, és hogy rendelkeznek-e atmoszférával, ami mind fontos tényező az élhetőség megítélésekor.

A felfedezés híre azonban ennek ellenére is nagyon izgalmas. Egyrészt azért, mert 40 fényév kozmikus léptékben rendkívül kis távolságot jelent, ami a kozmikus távolságokat illeti. Jelenlegi eszközeinkkel odautazni ugyan felfoghatatlanul hosszú idő lenne, de ahhoz elég közel van, hogy a következő években üzembe álló új, nagyobb távcsövekkel még több részlet derüljön ki a TRAPPIST–1 bolygóiról. A James Webb űrtávcsővel például akár az egyes bolygók közvetlenül is megfigyelhetők lehetnek majd, így rövidesen talán az is megállapítható lesz, hogy van-e ezeknek légkörük, és ha igen, az miből áll. Ha pedig az új műszerekkel sikerülne oxigént, metánt, ózont és szén-dioxidot kimutatni valamelyik bolygó légkörében, és esetleg ezek egy bizonyos arányát is megállapítani, 99 százalékos biztonsággal mondhatnánk, hogy az adott planétán van élet, teszi hozzá Michael Gillon, a kutatócsoport vezetője.

A másik dolog, amiért rendkívül fontos mérföldkő a TRAPPIST–1 bolygóinak detektálása, a kőzetbolygók számát illeti. Az első Naprendszeren kívüli bolygóra utaló jelet 1988-ban fedezték fel a csillagászok, az első meg is erősített detektálásra pedig 1992-ben került sor. Vagyis harminc évvel ezelőtt összesen 9 bolygó létezéséről tudtunk (akkor még a Pluto is ebbe a kategóriába tartozott). A kilencvenes években aztán egyre több exobolygót találtak a csillagászok. 1995-ben jelentették be az első olyan planéta felfedezését, amely egy Naphoz hasonló csillag körül kering. Az első olyan égitestre, amely a Földhöz hasonló méretű (tehát jó eséllyel kőzetbolygó), és csillaga élhető zónájában kering, azonban csak 2015-ben akadtak rá.

Jelenleg 2625 rendszerben összesen 3457 exobolygót ismerünk. Ami rögtön meg is mutatja az elmúlt évtizedek egyik legfontosabb felismerését: azt, hogy a bolygók száma a világegyetemben valószínűleg meghaladja a csillagok számát. Nem minden csillagnak van persze bolygója, de számos olyan csillag létezik, amelynek több kísérője is akad, vegyük csak példaként a Naprendszert vagy a TRAPPIST−1-et.

A rendelkezésre álló adatokból kiindulva Galaxisunk és más csillagrendszerek tömegével tartalmazhatnak bolygókat, köztük jónéhány földszerű égitestet is. Amikor az exobolygó-felfedezések megkezdődtek, az alkalmazott módszerek miatt nagyon sokáig csak forró jupitereket találtak a szakértők, ami azért volt meglepő a csillagászok számára, mert ilyen típusú égitest saját rendszerünkben nem létezik. Ahogy azonban fejlődik az észlelési technológia, egyre több kisebb bolygót is felfedezünk. A TRAPPIST−1 körül például rögtön hét ilyet is sikerült detektálni, amire korábban egyszer sem volt példa. Ezzel pedig akárhogy is nézzük, statisztikailag sokszorosára nőtt annak a valószínűsége, hogy a földihez hasonló életet találjunk a világegyetemben.

Kérdések a szöveghez

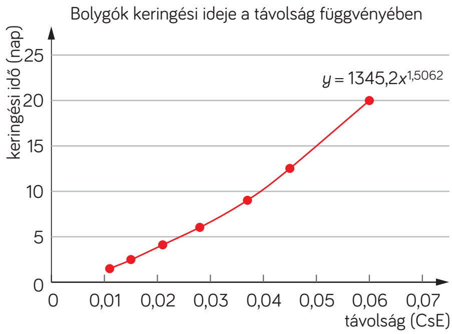
1. Milyen felfedezést tettek a kutatók?
2. Hol található a távcső, amellyel a felfedezést tették?
3. Hol tartózkodtak a kutatók?
4. Milyen módszert használtak a felfedezéshez?
5. Milyen égitestet vizsgáltak? Megközelítőleg milyen távolságban van tőlünk?
6. Miért kezdtek el tovább kutatni, és ehhez milyen eszközt használtak?
7. Milyen további kutatásokat terveznek, és milyen eszközzel?
8. Mióta ismerünk exobolygókat, és a cikk megjelenésének időpontjában mennyit?
9. Milyen típusú exobolygókat találtak először a kutatók, és miért?

Számításos feladat

Hét kisebb, nagyjából Föld nagyságú bolygó kering egy csillagászati értelemben véve közelinek számító, tőlünk 39 fényévnyire található TRAPPIST-1 nevű törpecsillag körül, jelentették be kutatók a NASA 2017. február 22-én tartott sajtótájékoztatóján. A bolygóknak a csillagtól mért átlagos távolságai és keringési idejeik az alábbi táblázatban található **(11. táblázat)** – Az adatokat grafikusan is ábrázoltuk **(16. ábra)**.

R (CsE)	*T* (nap)
0,011	1,51
0,015	2,42
0,021	4,05
0,028	6,1
0,037	9,21
0,045	12,35
0,06	20

11. táblázat Az exobolygók adatai



16. ábra Az exobolygók adataihoz illesztett függvény

Becsüljük meg a törpecsillag tömegét a táblázati *adatok és a grafikon segítségével is!* Hasonlítsuk össze a csillag tömegét a Nap tömegével! Milyen közelítő feltevéseket használtunk fel a becslés során?

A Csillagászati Egység, ami a Nap–Föld-távolság: $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m,

a gravitációs állandó $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$, a Nap tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg.

A megoldás alapgondolata

A Newton-féle gravitációs erőtörvényt alkalmazzuk a bolygórendszerre, ahol *M* a csillag tömege, *m* pedig az egyik bolygó tömege. *Kör alakkal közelítjük* a bolygó pályáját. A mozgásegyenlet:

$$\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot R \cdot \omega^2, \text{ ahol } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot R \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2},$$

innen a bolygó *m* tömegével egyszerűsíthetünk

$$\frac{\gamma \cdot M}{4 \cdot \pi^2} = \frac{R^3}{T^2},$$

ami ténylegesen Kepler 3. törvénye.
A további számolásokhoz átrendezzük a következő formára:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M} R^3$$

A számítás háromféle módon is elvégezhető.

Grafikonból:
Az Excel-függvényhez illesztett görbe egyenlete: $y = 1345{,}2 \cdot x^{1{,}5062}$.
Az x kitevőjét 1,5-del közelítjük. Az összefüggést négyzetre emelve közelítőleg:

$$y^2 = 1{,}81 \cdot 10^6 \cdot x^3$$

melyben Kepler 3. törvénye fedezhető fel.

Vegyük figyelembe, hogy a táblázatban a keringési idő napokban (ami $8{,}64 \cdot 10^4$ s), a távolság pedig Csillagászati Egységben (ami a Nap–Föld-távolság: $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m) van megadva!

A mértékegységek miatt kicsit alakítsuk át Kepler 3. törvényét:

$$T^2 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4)^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^3 \cdot R^3$$

Ezt átrendezve látható, hogy az Excel-görbe paramétere rejti magában a törpecsillag tömegét.

$$\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^3}{\gamma \cdot M \cdot (8{,}64 \cdot 10^4)^2} = 1{,}81 \cdot 10^6$$

A gravitációs állandó $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

vagy teljesen alapmértékegységekkel: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$

Mivel a gravitációs állandó ismert, így az egyenletben csak a csillag M tömege az ismeretlen.

$$4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{33} = \gamma \cdot M \cdot 8{,}64^2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}81 \cdot 10^6$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5^3 \cdot 10^{33}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}64^2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}81 \cdot 10^6} = \frac{135 \cdot 10^{33}}{901{,}2 \cdot 10^3}$$

$M \approx 0{,}15 \cdot 10^{30}$ kg, ami a Nap tömegének tizedénél is kisebb, kb. 8%-a.

Táblázatból:
Bármelyik bolygó adatpárjából ki lehet olvasni a keringési időt és a távolságot, amiből kiszámolható a csillag tömege:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M} R^3$$

A mértékegységek miatt az egyenletet kicsit át kell alakítani, ahogy a grafikonos számolásnál is:

$$T^2 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4)^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^3 \cdot R^3$$

Rendezzük a tömegre az összefüggést:

$$\gamma \cdot M \cdot T^2 \cdot 8{,}64 \cdot 10^8 = 4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{33} \cdot R^3$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5^3 \cdot 10^{33}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}64^2 \cdot 10^8} \cdot \frac{R^3}{T^2} = \frac{135 \cdot 10^{33}}{498 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{R^3}{T^2}$$

$$M = 0{,}27 \cdot 10^{36} \cdot \frac{R^3}{T^2}$$

Az arány mindegyik bolygóra körülbelül: $5{,}78 \cdot 10^{-7}$.

$$M = 0{,}27 \cdot 10^{36} \cdot 5{,}78 \cdot 10^{-7} = 1{,}56 \cdot 10^{29}\ \text{kg}.$$

Közelítő feltevés az, hogy csak a bolygók és a központi csillag kölcsönhatását vettük figyelembe, a bolygók egymásra gyakorolt hatását nem. Pedig az is jelentős, hiszen a bolygók csillagászati értelemben nagyon közel vannak egymáshoz. Kepler 3. törvényének newtoni megfogalmazásával közelítettünk, kör alakúnak véve a pályákat. Látszik a függvényillesztésből, hogy ez nem teljesen illeszkedik az adatokhoz.

Excel-táblázat segítségével:

$\frac{\gamma \cdot M}{4 \cdot \pi^2} = \frac{R^3}{T^2}$, ami ténylegesen Kepler 3. törvénye.

A keringési időket át kell számolni évre, vagyis a napokat osztani 365-tel.

A képletet rá kell húzni a cellákra (**12. táblázat**)! (De számológéppel is számolható.)

R^3/T^2		R (CsE)	T (nap)	T (év)
0,0778		0,011	1,51	0,00414
0,0768		0,015	2,42	0,00663
0,0752		0,021	4,05	0,01110
0,0786		0,028	6,1	0,01671
0,0796		0,037	9,21	0,02523
0,0796		0,045	12,35	0,03384
0,0719		0,06	20	0,05479

12. táblázat A csillag Naphoz viszonyított tömegének számítása

Ebben az $\frac{R^3}{T^2}$ arány a Naptömeghez viszonyított értéket szolgáltatja (mivel a többi mennyiség konstans, a gravitációs állandó és a π). És ez ténylegesen alig 8%.

Ez azért van, mivel a csillagászati egység (CsE) a földpálya nagysága, a keringési idő egysége pedig az 1 év. A Naprendszer esetében az arány kb. 1 **(13. táblázat)**.

Ezt a foglalkozást több középiskolai osztályban kipróbáltuk, a számításos feladatot 70 fő első éves egyetemista is megoldotta. A tapasztalatokból szakdolgozat készült (Kindl, 2018). A diákoknak alapvetően tetszett ez a fajta feldolgozásmód és az új felfedezés megjelenése a tanórán.

Bolygó	**CsE**	***T***	**R^3/T^2**
Merkúr	0,387	0,24	1,01
Vénusz	0,723	0,62	0,98
Föld	1	1	1,00
Mars	1,524	1,88	1,00
Jupiter	5,203	11,86	1,00
Szaturnusz	9,537	29,46	1,00
Uránusz	19,191	84	1,00
Neptunusz	30,069	164,79	1,00

13. táblázat A Naprendszer adatai

ELEKTROMOSSÁGTAN ÉS OPTIKA

Az elektromos jelenségek átszövik mindennapjainkat. Minden háztartásban legalább tíz elektromos energiával működő berendezés található, az életünk elképzelhetetlen ezek nélkül. Az optika ismerete nélkülözhetetlen a látás megértéséhez. Jelen fejezetben ezért néhány tanulságos példa ehhez a témakörhöz kapcsolódik. Az ajánlott feladatok elsősorban a középiskolai korosztály számára készültek a felhasznált matematikai apparátus miatt. A látással kapcsolatos szövegek azonban a 8. évfolyamos tanulók számára is feldolgozhatók.

A gondolkodásfejlesztés széles körű lehetőségeire van mód, ilyen például az arányossági gondolkodás, az analógiás gondolkodás fejlesztése, különböző számítások elvégzése adott törvényszerűségek felhasználásával, kapcsolatteremtés az informatika tantárggyal, mérési adatok kezelése, rendezése, a kritikus gondolkodás elősegítése.

OERSTED KÍSÉRLETE

A foglalkozás jellemzői

20-25' 8., 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Az elektromos áram és a mágneses mező kapcsolatának kísérleti vizsgálata, tudományos szöveg értő olvasása és elemzése.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, kutatási készségek

Fejlesztett további készségek:
szövegértés

Fejlesztett tartalmi tudás:
Az elektromos áram és az általa létrehozott mágneses mező jellemzői.

Eszközök, anyagok:
füzet, íróeszköz, banándugók, áramforrás, kis mágnesek, vasreszelék, vezetődrótok (melyeket lehet hajlítgatni), különböző menetszámú tekercsek, toroid

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét:
- elektromos mező, áramerősség, feszültség;
- mágneses mező.

A foglalkozás menete
- Bevezető kérdések
- Szövegfeldolgozás
- Tanulók kísérlettervezése
- Tanulói hipotézisek
- Vizsgálatok, jegyzőkönyvkészítés
- Következtetések levonása

Bevezető kérdések

- Mit gondoltok, van-e kapcsolat az elektromos és a mágneses kölcsönhatás között?
- Hogyan tudnánk ezt megvizsgálni?
- Mi hozza létre az elektromos mezőt?
- Mire hat az elektromos mező?
- Miben hozzuk létre az elektromos mezőt? (pl. kondenzátorlemezek közt, fémes vezetőben stb.)
- Mi az elektromos áram?
- Hogyan tudunk elektromos áramot létrehozni?
- Milyen anyagok vezetik az elektromos áramot?

Kutatási kérdés

Hogyan mutatható ki egy árammal átjárt fémes vezető körül esetlegesen létrejött mágneses mező?

Szövegfeldolgozás

„1820 tavaszán Oersted előadást tartott diákjainak, amikor meglepő dolog történt. Oersted azt kívánta bemutatni, ahogyan az elektromos áram felmelegít egy platinavezetéket. A kísérleti asztalon azonban egy iránytű is volt, amikor a fenti bemutatót elkezdte. Amikor bekapcsolta az áramot a vezetékbe, azt vette észre, hogy az iránytű egy pillanatra megrezzent, majd kissé elfordult. Amikor pedig kikapcsolta az áramot, az iránytű visszatért eredeti helyzetébe.
Ezt követően szisztematikus kísérletezésbe kezdett az elektromos áram által az iránytűre ható erővel kapcsolatban. Arra volt kíváncsi, hogy az vonzó- vagy taszítóerőként hat a mágnesre. Ezért elmozdította a vezetéket, és a mágnestűhöz képest fölé, mellé, alá helyezte. Megfordította az áram irányát is. Két vezetéket alkalmazott egy helyett. Minden változtatás után megfigyelte az áram hatását a mágnestűre. Végül rájött, hogy az áram egyszerre hoz létre vonzó- és taszítóerőt, a hatás a mágnestű és a vezeték kölcsönös helyzetétől függ.
Több hónapos kísérletezés után megállapította, hogy az elektromos áram által keltett mágneses erő egy teljesen újfajta erő, amely különbözik minden más olyan erőtől, amit Newton leírt. Ez az erő nem egyenes vonalban fejtette ki hatását, hanem egy kör mentén akörül a vezeték körül, amelyben az áram folyt. Tehát az elektromossággal átjárt vezetékek mágneses tulajdonságot mutatnak.” (Zemplén et al., 1963)

Kérdések a szöveg kapcsán

- Milyen jelenséget tapasztalt meg véletlenül Oersted?
- Milyen kutatási kérdéseket tett fel?

- Milyen kísérleteket végzett el a kérdések megválaszolásához?
- Milyen következtetésre jutott?

Tanulói feladatok

Végezzétek el ti is OERSTED kísérleteit! Fogalmazzatok meg további kutatási kérdéseket!

A rendelkezésetekre álló eszközök: banándugók, áramforrás (pl. laposelem), kis mágnesek, vasreszelék, vezetődrótok (melyeket lehet hajlítgatni), különböző menetszámú tekercsek, toroid.

További kutatási lehetőségek

Először egyenes áram járta vezető mágneses terét vizsgálják meg a diákok. A szövegben leírtakon kívül érdemes még az áram járta vezetőtől való távolság függvényében is vizsgálni a mágneses mezőt.

Ezt követően még néhány lehetséges formát: az áram járta *körvezető, tekercs* és *toroid* mágneses terét érdemes megvizsgálni.

A tanulók érdeklődésének fenntartására és egyben gondolkodásának fejlesztése céljából érdemes az egyes vezetékformák mágneses terének *bemutatása előtt* megbeszélni a lehetséges *hipotéziseket,* azt, hogy milyen szerkezetű mezőre számítanak a diákok. Mit várnak?

- Milyen lesz az áram járta vezeték körüli mágneses mező, ha az egyenes vezetőt elkezdjük meghajlítani, majd kört formálunk belőle?
- Hogyan alakul a mező szerkezete, ha nem egy darab kör alakú vezetőkeretet alakítunk ki, hanem többet (tekercs)?
- Hogyan alakul a mező szerkezete, ha a tekercset is kör alakúra hajlítjuk (toroid)?

Hasonlítsák össze a különböző jellegű mágneses mezőket, mint az

- áram járta egyenes vezető,
- körvezető,
- tekercs,
- rúdmágnes,
- patkó alakú mágnes által létrehozott mező.

Rajzolják le a mágneses mezőket a különböző esetekben.
Keressenek különböző applikációkat, melyek bemutatják az egyes mezők szerkezetét.
Elő lehet-e állítani „homogén” mágneses mezőt?

AZ OHM-TÖRVÉNY FELFEDEZÉSE – EREDETI ADATOK ELEMZÉSE EXCELBEN

A foglalkozás jellemzői

20-25' 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Eredeti mérési adatok elemzése, ábrázolása, bepillantás a kutatás menetébe.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
mérési adatok kezelése, azok vizuális megjelenítése, ábrázolása; az Excel program használata

Fejlesztett tartalmi tudás:
Az Ohm-törvény gyakorlása, a feszültség, áramerősség, elektromotoros erő, termoelem, fémes vezető fogalmak alkalmazása.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét:

- elektromos mező, áramerősség, feszültség;
- mágneses mező;
- áram mágneses tere.

Mivel az Ohm-törvényt általában hamarabb tanítjuk, mint az áram mágneses hatását, ezért ennek a feladatnak az alkalmazása tudatos előzetes tervezést igényel.

Georg Simon Ohm (1789–1854) német gimnáziumi tanár nevét őrzi a róla elnevezett törvény, melyet 1826-ban alkotott meg. Az ehhez szükséges fogalmakat és a mérőberendezéseket is gyakorlatilag ő alkotta meg.

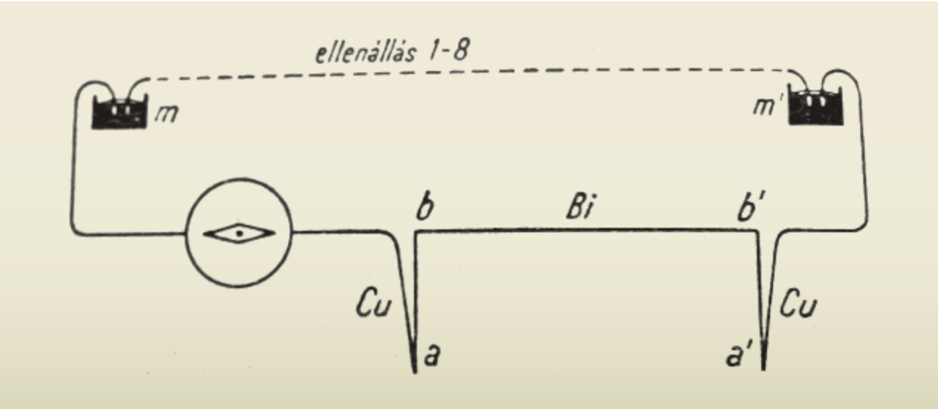
Problémafelvetés

A korszakban már sok és sokféle elektromos jelenséget ismertek, de nem voltak megfelelő mérési eljárások, ezekhez mérőeszközök, sőt, a jelenségek leírásához megfelelő fogalmak sem. Így nem tudtak az elektromos áramkörökre méréseken alapuló, mérési adatokkal alátámasztott mennyiségi összefüggéseket, áramkörökre vonatkozó törvényeket felállítani. Nem váltak még el rendesen az elektromos áramerősség és az áramforrás feszültsége fogalmak sem.

Kutatási kérdések

Milyen összefüggés van az áramforrás feszültsége és az áramkörben mérhető áramerősség között? Hogyan lehet az áramerősséget mérni? Hogyan, milyen mennyiségekkel jellemezhető az áramkörben lévő vezető drót áramvezetés szempontjából? Milyen összefüggés lehet a drót anyaga, hossza és keresztmetszete között? Milyen fizikai mennyiséget lehetne erre bevezetni?

Ohm *kísérleti berendezésének* lényege a következő volt: *áramforrásként termoelemet* használt, mivel ez állandó feszültséget tud adni[4]. Erre azért volt szüksége, mivel a kicsit régebben, 1800-ban feltalált Volta-elem által adott feszültség ingadozott a terhelés hatására. Ezzel szemben a termoelem feszültsége csak a hőmérséklet-különbségtől függ. Ezt Ohm-állandó értéken tudta tartani a mérések alatt. Az egyik Cu-Bi csatlakozást olvadó jégben, azaz 0 °C-on, a másikat pedig forrásban lévő vízben, vagyis 100 °C-on tartotta **(17. ábra)**.



17. ábra A mérési elrendezés vázlatrajza (Zemplén et al., 1963, p. 26)

Az *áramerősség méréséhez* szintén egy, az adott korszakban új tudományos eredményt használt fel, nevezetesen az 1820-ban Oersted által felfedezett mágneses hatást. Egy iránytű elfordulásának mértékét vette az áramerőséggel arányosnak. Az iránytűt egy torziós szál végére tette, mellyel nagyon finom elfordulásokat tudott mérni. A torziós mérleg skáláját kicsiny mikroszkóppal nézte.

Áramkörébe különböző ellenállásokat helyezett, és ismerve az elem elektromotoros erejét, az áramerősséget a mágnestű kilengésével mérte, egy általa épített berendezésben.

4 Ohm eredeti német nyelvű cikke:
http://www2.ohm-hochschule.de/bib/textarchiv/Ohm.Bestimmung_des_Gesetzes.pdf

Mérési eredményeit a következő összefüggésben foglalta össze: $X = \dfrac{a}{b+x}$, ahol X gyakorlatilag az áramerősséget jelölte, x a vezetődrót hossza, a változtatott ellenállás volt, a a termoelem elektromotoros ereje, b pedig az áramkör többi részének ellenállása. Ha a és b értékét OHM behelyettesítette a különböző mérési sorozatokba, a *számított* és a *mért értékek* nagyon jó egyezést mutattak.

Kísérleteihez 2 mm vastag rézdrótot használt, melyek hossza 2, 4, 6, 10, 18, 34, 66 és 130 hüvelyk (5,4 cm és 350 cm közötti értékek) voltak. OHM ezekre számokkal hivatkozott cikkében 1-től 8-ig. A **18. ábrán** öt *méréssorozat* adatai láthatók.

Zeit der Beobachtung.	Versuchsreihen.	Leiter.							
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
8. Jan.	I.	$326\frac{3}{4}$	$300\frac{3}{4}$	$277\frac{3}{4}$	$238\frac{1}{4}$	$190\frac{3}{4}$	$134\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{4}$	$48\frac{1}{2}$
11. Jan.	II.	$311\frac{1}{4}$	287	267	$230\frac{1}{4}$	$183\frac{1}{2}$	$129\frac{3}{4}$	80	46
	III.	307	284	$263\frac{3}{4}$	$226\frac{1}{4}$	181	$128\frac{3}{4}$	79	$44\frac{1}{2}$
15. Jan.	IV.	$305\frac{1}{4}$	$281\frac{1}{2}$	259	224	$178\frac{1}{2}$	$124\frac{3}{4}$	79	$44\frac{1}{2}$
	V.	305	282	$258\frac{1}{4}$	$223\frac{1}{2}$	178	$124\frac{3}{4}$	78	44

18. ábra Az öt méréssorozat adatai (forrás: Szegedi, 2013, p. 244)

A **19. ábrán** pedig OHMnak a fenti összefüggés segítségével számított eredményei láthatók. A b értéke 20,25, a értékei pedig rendre 7285, 6965, 6885, 6800 és 6800 voltak.

Versuchsreihen.	Leiter.							
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
I.	328	$300\frac{1}{2}$	$277\frac{1}{2}$	$240\frac{3}{4}$	$190\frac{1}{2}$	$134\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{4}$	$48\frac{1}{2}$
II.	313	$287\frac{1}{4}$	$265\frac{1}{3}$	$230\frac{1}{4}$	182	$128\frac{1}{3}$	$80\frac{3}{4}$	$46\frac{1}{4}$
III.	$309\frac{1}{2}$	284	$262\frac{1}{3}$	228	180	127	$79\frac{3}{4}$	$46\frac{1}{4}$
IV.	$305\frac{1}{2}$	$280\frac{1}{2}$	259	$224\frac{3}{4}$	$177\frac{3}{4}$	$125\frac{1}{4}$	79	45
V.	$305\frac{1}{2}$	$280\frac{1}{2}$	259	$224\frac{3}{4}$	$177\frac{3}{4}$	$125\frac{1}{4}$	79	45

19. ábra A számított eredmények (forrás: Szegedi, 1963, p. 245)

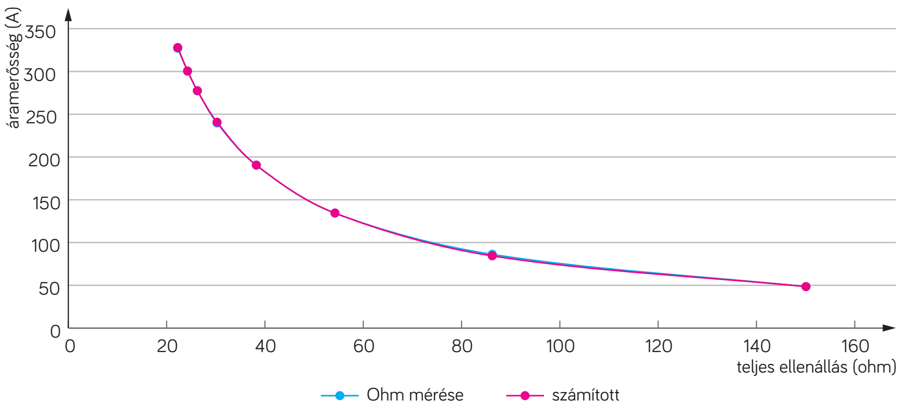
Tanulói feladat

Vizsgáljuk meg, hogy mennyire voltak pontosak Ohm mérései saját számításai szerint! Ábrázoljuk valamelyik összetartozó mérési és számítási adatsorpárt egyazon ábrában! Válasszuk például mindkét sorozatból az első sor adatait (**20. ábra**)!

Mint az ábrából látható, alig van különbség a mért és a számított értékek közt!

20,25 + *x*

teljes ellenállás	22,25	24,25	26,25	30,25	38,25	54,25	86,25	150,25
Ohm mérése	326,75	300,75	277,75	238,25	190,75	134,50	88,25	48,50
számított	328,00	300,50	277,50	240,75	190,50	134,50	84,50	48,50



20. ábra Ohm mért és számított adatainak Excel-ábrája

Ohm nemcsak egyszerűen a feszültség, az áramerősség és az ellenállás viszonyát határozta meg, hanem az áramkörbe iktatott ellenállásoknak – melyek különböző fémhuzalok voltak – a vezető hosszától, keresztmetszetétől és anyagától való függését is. Ő vezette be a vezető anyagi minőségére jellemző fajlagos vezetőképesség fogalmát. A különböző anyagok között ellenállási sorrendet állapított meg, mennyiségi viszonyokat fogalmazott meg. Egy-egy precíz mérés több órát vett igénybe. A mérések közt is legalább egy óra szünetet tartott, míg beállította a megfelelően zavarásmentes körülményeket. Ohm középiskolai tanár létére ismerte korának legújabb felfedezéseit, melyeket fel is használt munkája során!

A GALVÁNELEMBŐL KIVEHETŐ MAXIMÁLIS TELJESÍTMÉNY MATEMATIKAI VIZSGÁLATA

A foglalkozás jellemzői

25-30' 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
A tanulók egy konkrét gyakorlati problémán keresztül ismerkednek az áramkörök tulajdonságaival.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
arányossági gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
adatok ábrázolása, grafikonok készítése és elemzése, az Excel program használata

Fejlesztett tartalmi tudás:
Az elektromos teljesítmény változása az áramkör egyes elemein.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete
- A tanulók elolvassák a feladatot, majd egyénileg gondolkoznak azon.
- A tanulók ötleteiket csoportban, majd a tanárral közösen is megbeszélik.
- Függvények ábrázolása önkényesen felvett adatok segítségével, lehetőleg az Excel program segítségével.
- Következtetések megfogalmazása.

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét:
- elektromos mező, áramerősség, feszültség;
- elektromotoros erő, kapocsfeszültség;
- elektromos teljesítmény;
- Ohm törvénye.

Kutatási feladat
„Galvánelemünk elektromotoros ereje 1 V, belső ellenállása 100 ohm.”[5]
- Mekkora külső ellenállást kapcsoljunk hozzá, ha maximális teljesítményt szeretnénk belőle kivenni?
- Mekkora ez a teljesítmény?

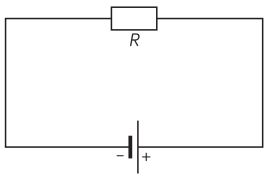
5 A feladat ötletét a Dér, Radnai, & Soós (1974). *Fizikai feladatok II.* **19.13**. és **47.** feladatai adták.

Ábrázoljuk a következőket:

- áramerősség – a külső ellenállás függvényében,
- kapocsfeszültség – a külső ellenállás függvényében,
- a fogyasztóra eső teljesítmény – a külső ellenállás függvényében!

Lehetséges megoldás

Mielőtt elkezdjük az összefüggéseket felírni, gondoljuk végig, mintegy *hipotézisként,* hogy milyen függvényekre számítunk az egyes esetekben! Rajzoljuk fel az egyszerű áramkört **(21. ábra)**!



21. ábra Az ellenállást és a telepet tartalmazó egyszerű áramkör

Áramerősség – a külső ellenállás függvényében: minél nagyobb a külső ellenállás, várhatóan annál kisebb lesz az áramerősség. Tehát a függvény *tart a nullához.* Behelyettesítve az adatokat az áramerősség az ellenállás $I(R)$ függvény a következő:

$$I = \frac{U_e}{R_b + R} = \frac{1}{100 + R}$$

Kapocsfeszültség – a külső ellenállás függvényében: a kapocsfeszültség a külső ellenálláson eső feszültséget jelenti. Ezért arra számítunk, hogy az annál nagyobb lesz, minél nagyobb a külső ellenállás, hiszen a teljes feszültség (az 1 V) arányosan egyre nagyobb része esik azon. A görbének az 1 V *maximális értékhez kell tartania.* Tehát egy úgynevezett telítésbe menő görbe kell, hogy legyen. Az adatok beírásával az $U(R)$ függvény:

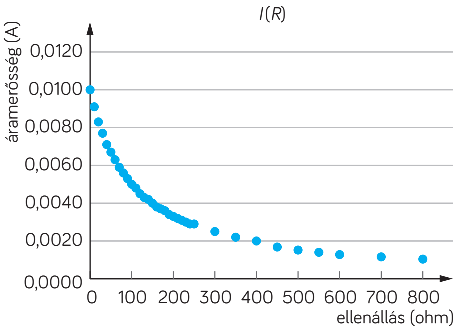
$$U_k = I \cdot R = \frac{R}{100 + R}$$

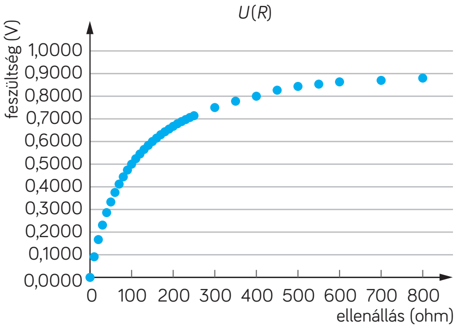
A fogyasztóra eső teljesítmény – a külső ellenállás (mely a fogyasztó) függvényében: a külső ellenálláson leadott teljesítményt az előző két függvény szorzataként számítjuk ki. Az egyik monoton csökkenő, a másik pedig monoton növekvő függvény. A kettő szorzata minden bizonnyal *maximumhellyel fog rendelkezni.* Az adatok beírásával a $P(R)$ függvény:

$$P = U_k \cdot I = \frac{R}{(100 + R)^2}$$

A függvények megrajzolásához alkalmazzuk az Excel programot! Célszerű a számolást sok esetben (sok ellenállás-értéknél) elvégeztetni a programmal, mintegy ráhúzni a megfelelő képletet a megfelelő cellákra. Esetünkben ezek az adatok tekinthetők a „mérési adatoknak”, illetve így kezelhetjük. A maximumérték közelében érdemes több tizedesjeggyel számoltatni. A számítások eredményei az alábbi táblázatban láthatók. A grafikonok elkészítéséhez ebből kell kivenni a megfelelő oszlopokat **(22. a és b ábra)**.

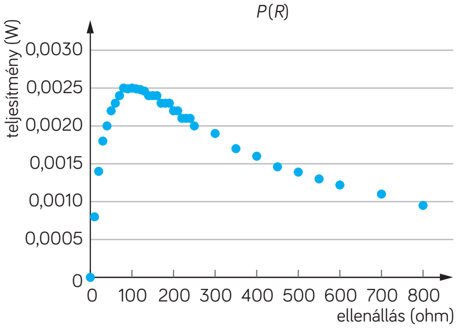
R (ohm)	*I*(*R*)	*U*(*R*)	*P*(*R*)	
0	0,0100	0,000	0,0000	
10	0,0091	0,091	0,0008	
20	0,0083	0,167	0,0014	
30	0,0077	0,231	0,0018	
40	0,0071	0,286	0,0020	
50	0,0067	0,333	0,0022	
60	0,0063	0,375	0,0023	
70	0,0059	0,412	0,0024	
80	0,0056	0,444	0,0025	
90	0,0053	0,474	0,00249	
100	0,0050	0,500	0,00250	max.
110	0,0048	0,524	0,00249	
120	0,0045	0,545	0,00248	
130	0,0043	0,565	0,00246	
140	0,0042	0,583	0,0024	
150	0,0040	0,600	0,0024	
160	0,0038	0,615	0,0024	
170	0,0037	0,630	0,0023	
180	0,0036	0,643	0,0023	
190	0,0034	0,655	0,0023	
200	0,0033	0,667	0,0022	
210	0,0032	0,677	0,0022	
220	0,0031	0,688	0,0021	
230	0,0030	0,697	0,0021	
240	0,0029	0,706	0,0021	
250	0,0029	0,714	0,0020	
300	0,0025	0,750	0,0019	
350	0,0022	0,778	0,0017	





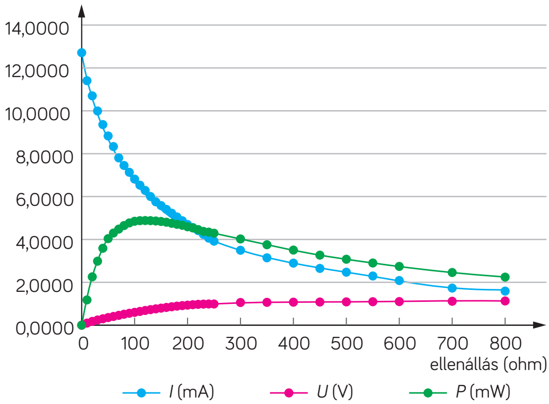
22/a ábra Az *I*(*R*) és az *U*(*R*) függvények

A két függvény szorzata, melynek *valóban maximuma* van **(22/b ábra)**.



22/b ábra Az *I*(*R*) és az *U*(*R*) függvények szorzata

Lehet egy grafikonban is ábrázolni a három függvényt **(23. ábra)**.



23. ábra A három függvény

A teljesítmény–ellenállás függvényből látható, hogy *a külső ellenálláson kivehető teljesítménynek maximuma van, ahogy az az előzetes meggondolásokból adódik.* Ez az ellenállásérték éppen megegyezik a telep belső ellenállásával, tehát 100 ohm. A maximális teljesítmény értéke pedig 2,5 mW.

A maximum helye a függvény deriválásával, majd a derivált 0-val való egyenlővé tételével is meghatározható. Ez persze nem egyszerű feladat, mivel hányados függvényről van szó.

$$P = \frac{R}{(100+R)^2}$$

deriválás

$$P' = \frac{(100+R)^2 - R \cdot 2(100+R)}{(100+R)^4}$$

A függvény zérushelyét keressük, amely megadja a szélsőérték helyét: $P' = 0$.
$100 + R$ nem lehet nulla, ezért a számláló zérushelye csak

$$100 + R - 2 \cdot R = 0, \qquad \text{innen} \quad R = 100 \text{ ohm.}$$

Vagyis az elem egy olyan ellenálláson adja le a legnagyobb teljesítményt, mely azonos a belső ellenállásával. A grafikus megoldás esetében is ezt kaptuk.

A feladat grafikus megoldása az Excel használatával némileg interaktív is lehet, ha változtatjuk a telep elektromotoros erejét és belső ellenállását. Ehhez az előbbi két értéket tartalmazó cellára kell hivatkoztatni az áramerősség számítását.

Jelen példából az is látható, hogy az Excel használata lehetővé teszi, hogy bonyolult matematikai ismeret nélkül is megkapjuk az eredményt.

AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ FELFEDEZÉSE

A foglalkozás jellemzői

20' 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Az elektromos és a mágneses mező kapcsolatának vizsgálata; Faraday felfedezésének nyomon követése tudományos szöveg értő olvasása és elemzése révén.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, analógiás gondolkodás, kutatási készségek

Fejlesztett további készségek:
szövegértés

Fejlesztett tartalmi tudás:
indukált feszültség létrehozása

Eszközök:
füzet, íróeszköz, banándugók, különböző menetszámú tekercsek, mágnesek, feszültségmérő műszer

Problémafelvetés
Az áramnak van mágneses hatása, az áramvezetőt mágneses mező veszi körül, melyet Oersted 1820-as vizsgálataiból lehetett tudni. Vagyis az elektromos mező hatására mozgásba jövő töltések maguk körül mágneses mezőt hoznak létre. Az a gondolat, hogy a mágnességnek elektromos áramot kell létrehoznia, mivel az

elektromos áram is létrehoz mágnességet, ebben az időben már a levegőben volt. Faraday megszállottan kutatta a jelenséget.

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: elektromos mező, áramerősség, feszültség.

Idézetek Faraday naplójából:

> 1822.: „Alakítsd át a mágnességet villamossággá."
> 1831. augusztus 29.: „A B oldalon levő tekercsekből egy tekercset csináltam, végeit pedig összekötöttem rézdróttal, amely közvetlenül egy mágnestű fölött haladt el (3 láb távolságra a vasgyűrűtől). Azután összekötöttem az A oldali egyik tekercs végeit a teleppel; azonnali hatás mutatkozott a tűn. Rezgett, és végül az eredeti helyzetben került nyugalmi állapotba. Mikor megszakítottam az A - oldal kapcsolását a teleppel, ismét jelentkezett a tű ingadozása."

Vagyis mai szóhasználatunkkal az egyik tekercsen áthaladó elektromos áram egy, a közelben lévő másik tekercsben áramot indukált.

> 1831. október 17.: „57. Kísérletek O-val. A henger egyik végén levő 8 tekercsvégződést megtisztítottam, és nyalábbá kötöttem össze. Ugyanígy a másik 8 végződést is. Ezeket az összekötött végeket aztán hosszú rézdrótok segítségével a galvanométerrel kötöttem össze – azután egy 3/4 hüvelyk átmérőjű és 8 1/2 hüvelyk hosszú henger alakú rúdmágnes egyik végét bedugtam a henger alakú tekercs végébe – utána gyorsan egész hosszában bedugtam, amire a galvanométer tűje megmozdult, amikor kihúztam, a tű ismét megmozdult az ellenkező irányban. Ez a hatás minden alkalommal megismétlődött, ha a mágnest a hengerbe tettem, vagy onnan kivettem, és ennek következtében elektromos hullám keletkezett pusztán a mágnes közelítése miatt, nem pedig attól, hogy ott van a mágnes.
>
> 58. A tű nem maradt meg elfordult helyzetében, minden alkalommal visszatért a helyére. A mozgások sorrendje a fordítottja volt az előző kísérletek sorrendjének – a mozgás iránya megfelelt az előző kísérletnek, vagyis a tű igyekezett a gerjesztő mágnessel párhuzamos helyzetbe kerülni, mivel a drótnak és az azonos nevű pólusoknak ugyanazon oldalán volt, ugyanabban az irányban." (idézi: Gamov, 1965, p. 152–153)

Kérdések a szövegekhez

- Mi volt Faraday kutatási kérdése? Milyen feladatot tűzött maga elé?
- Milyen vizsgálatokat végzett?
- Milyen eszközöket alkalmazott?

- Milyen eredményeket kapott?
- Milyen mérőműszert használt?
- Hogyan mutatta ki a keresett jelenséget?

Feladat

- Ismételjétek meg FARADAY kísérleteit!
- Terjesszétek ki FARADAY vizsgálatainak körét! Milyen függéseket vizsgálnátok még?
- Alkossatok hipotéziseket arra, hogy mitől és hogyan függhet az indukált elektromos mező!

A rendelkezésetekre álló eszközök: banándugók, vezetődrótok, különböző menetszámú tekercsek, mágnesek, feszültségmérő műszer.

Az elektromos áram indukálása a tekercsben dinamikus jelenség. Az áram csak addig létezett, ameddig FARADAY a mágnest betolta vagy kihúzta a tekercsből. Sok fizikus igyekezett megfigyelni a hatást, de csak statikusan elrendezett mágnesekkel, drótokkal próbálkoztak.

A FARADAY által elvégzett vizsgálatok sorát természetesen érdemes kiterjeszteni. Célszerű vizsgálni a tekercs *menetszámától* való függést, *egy vagy több rúdmágnest* ki- és betolni, *gyorsabban és lassabban* ki- és betolni, stb. Az egyes jelenségek megfigyelése előtt mindig alkossanak hipotéziseket a tanulók!

Néhány további feladat

- Hasonlítsuk össze az elektrosztatikus mezőt az indukció során keletkező elektromos mezővel!

Az időben változó mágneses mező elektromos mezőt hoz létre, indukál maga körül. Az indukció útján keletkező elektromos mező lényegesen különbözik az elektrosztatikus mezőtől. Ez utóbbinak ugyanis mindig töltésekben kezdődő és végződő erővonalai vannak, ami egy örvénymentes mezőt alkot. Az indukció során keletkező elektromos mező viszont a zárt erővonalak miatt örvényes mező.

- Hasonlítsátok össze az elektromágneses indukció jelenségét az elektromos megosztással!
- Mennyi ideig tart az elektromos megosztás, ha a test egy töltött test környezetében található? Ehhez képest a mágnes közelében lévő zárt vezetőkörben csak milyen esetben folyik áram?
- Hasonlítsátok össze a tekercs és a kondenzátor ellenállását egyen- és váltóáramú áramkörben!

- Hasonlítsátok össze az elektromos rezgőkört és a fonálinga lengését, vagy a rugóhoz erősített test rezgését!
- Hasonlítsátok össze a fémes vezetőket, az ionos vezetőket és a félvezetőket többféle szempontból! Alkossatok szempontokat az összehasonlításhoz!
- Menjetek be egy elektrotechnikai boltba, vagy böngésszétek egy elektronikai webshop kínálatát, és nézzétek meg, hogy milyen ellenállásokat, kondenzátorokat lehet ott kapni! Melyik milyen célra használható?
- Nézzetek utána, hogy milyen mérőberendezésben alkalmaznak kondenzátort, illetve tekercset!

PTOLEMAIOSZ EREDETI MÉRÉSI ADATAINAK FELDOLGOZÁSA EXCELBEN

A foglalkozás jellemzői

15-20' 11.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Ptolemaiosz eredeti mérési adatainak elemzése, ábrázolása.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
szövegértés, mérési adatok kezelése, azok vizuális megjelenítése, ábrázolása, az Excel program használata

Fejlesztett tartalmi tudás:
A törési törvény gyakorlása.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete

- A tanulók elolvassák a szöveget, megvizsgálják Ptomemaiosz eredeti táblázatait.
- Excel program segítségével ábrázolják azok adatait, majd a szögek szinuszait is ábrázolják.
- Összehasonlítják az egyenes paraméterét a víz törésmutatójával.

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: beesési szög, törési szög, törési törvény, törésmutató.

Tanulói feladatlap

Olvassátok el az alábbi leírást Ptolemaiosz vizsgálatairól, majd oldjátok meg a feladatokat!

Az ókori görög gondolkodókat úgy tartjuk nyilván, hogy nem igazából végeztek kísérleteket, de ez nem teljesen így van. Ptolemaiosz (Ptolemais Hermiou, i. sz. 90 körül – Alexandria, i. sz. 168), akinek a világ földközéppontú világmodellje másfél évezreden keresztül uralkodó elmélet volt, leírt kísérleteket, méghozzá mérőkísérletet a fény törésével kapcsolatban *Optika* című könyvében, mely csak arab fordításban maradt fenn.

> „A fénysugarakat kétféle módon lehet változtatni: visszaveréssel, vagyis visszapattanással a tükörnek nevezett tárgyakról, amelyek nem teszik lehetővé a behatolást, és hajlítással (vagyis töréssel) olyan közegek esetében, amelyeknél lehetséges a behatolás, ezeknek közös elnevezése van (átlátszó anyagok), mert a fénysugár keresztülhatol rajtuk." (idézi Gamov, 1965, p. 34.)

Ptolemaiosz a következő táblázatot állította össze a levegőben mért különböző beesési szögekhez tartozó, vízben való törési szögekre.

Szög a levegőben, beesési szög (°)	Szög a vízben, törési szög (°)
10	8
20	15,5
30	22,5
40	28
50	35
60	40,5
70	45
80	50

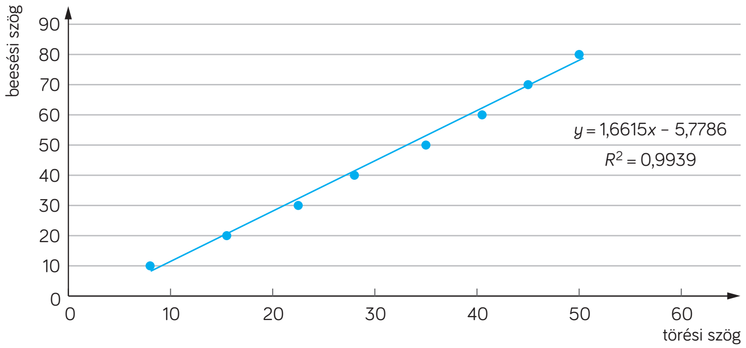
14. táblázat Ptolemaiosz mérése a levegőből vízbe történő fénytörés esetében (Gamov, 1965, p. 35 nyomán)

Ptolemaiosz tanulmányozta a fény törését a levegő és az üveg határfelületén is, és azt találta, hogy ebben az esetben kisebb lesz a törési szög, mint a víz esetében. Mérései alapján arra gondolt, hogy a beesési szöggel egyszerűen arányos a törési szög. A szögek szinuszaitól való függést nem ismerte fel. Pedig megtehette volna, mivel az ívek és a húrok közti összefüggés törvénye mint matematikai eszköz már rendelkezésre állt. Sőt, maga PTOLEMAIOSZ is alkalmazta csillagászati megfigyelései kapcsán. De nyilván nem gondolt rá, ténylegesen nem is egyszerű.

Feladatok

- Ábrázoljuk a mérési adatokat az Excel program segítségével!
- Mit állapíthatunk meg? Rossz volt PTOLEMAIOSZ elképzelése?
- Hogyan gondolkodunk ma erről? Nézzük meg, hogy mai modellünk jobb-e!

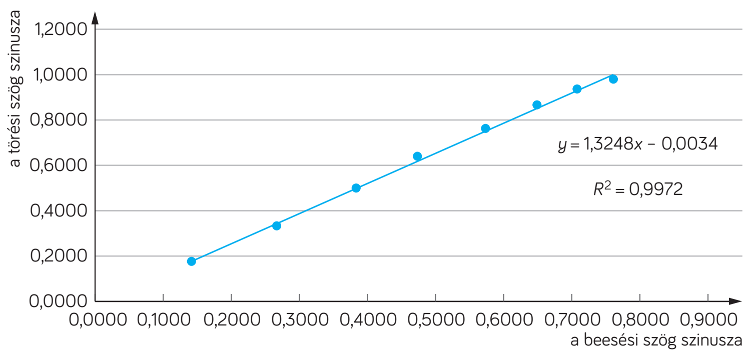
Lehetséges megoldás



24. ábra Ptolemaiosz mérési adatai: a törési és a beesési szög viszonya

Ptolemaiosz mérési adatai

Az ábrán az látható, hogy PTOLEMAIOSZ mérési adataihoz elég jó pontossággal egyenes illeszthető **(24. ábra)**. Nézzük meg, hogy a szögek szinuszai esetében pontosabb lesz-e az illesztés!



25. ábra Ptolemaiosz mérési adatainak szinuszos transzformációja

Amint az ábrán látható, a szögek szinuszai jobban illeszkednek egy egyenesre (25. ábra). Az egyenes meredeksége, mely a törésmutató, egészen jó értéket ad a vízre, és az egyenes majdnem az origóból indul. Tehát Ptolemaiosz igen jól mért!

Példánk alapján látható, hogy a törési törvény szinuszos voltának a felismerése pusztán a szögek mérései, mint mérési eredmények alapján nem várható el. Ehhez a fénysugár geometriai és hullámmodelljére, tehát egy határozott elméleti keretre is szükség volt!

HŐTAN ÉS ENERGIA

KÜLÖNBÖZŐ ANYAGOK FAJHŐJE

A foglalkozás jellemzői

15-20' 7-8.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
különböző anyagok fajhőjének összehasonlítása

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, összefüggések felismerése, oksági magyarázatok keresése, kapcsolatteremtés a kémia és a földrajz tantárgyakkal

Fejlesztett további készségek:
mérési adatok kezelése, azok vizuális megjelenítése, ábrázolása

Fejlesztett tartalmi tudás:
a fajhő fogalmának elmélyítése

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete

- A fajhő fogalmának átismétlése
- Számításos feladatok a fajhő fogalmának felhasználásával
- Fajhőadatok keresése a függvénytáblázatban vagy internetes táblázatban
- Összehasonlítási szempontok keresése
- Néhány Excel-ábra elkészítése

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: fajhő, időjárás, éghajlat, periódusos rendszer.

Feladat

A függvénytáblázat nagyon sok, az anyagok különböző tulajdonságait jellemző adatot tartalmaz, melyeket érdemes vizsgálat alá vonni és értelmezni. Vizsgáljuk meg a különböző anyagok fajhőjét, hasonlítsuk össze azokat!

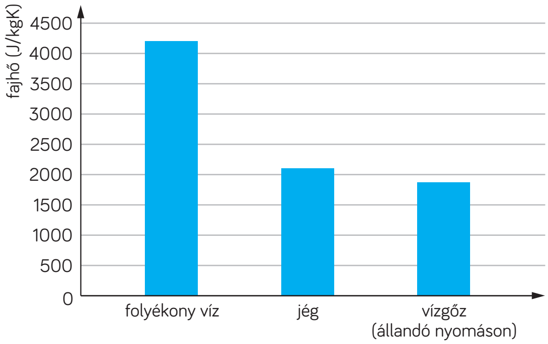
- Alkossunk először összehasonlítási szempontokat!
- Készítsünk Excel-ábrát a fajhőviszonyok szemléletessé tételéhez!

Lehetséges megoldás

Összehasonlítási szempont lehet például az anyagok

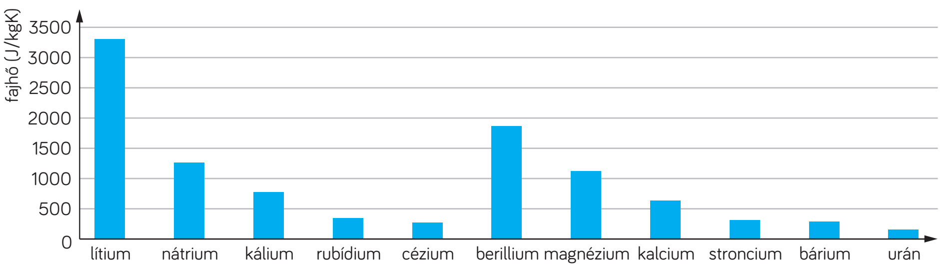
- halmazállapota,
- az elem periódusos rendszerben elfoglalt helye,
- típusa (pl. elem vagy vegyület) stb.

Hasonlítsuk össze a víz három halmazállapotában a fajhőértékeket! Ábrázoljuk a táblázatokban talált adatokat! A **26. ábrán** látható, hogy a folyékony halmazállapotban a legnagyobb, míg gázhalmazállapotban a legkisebb a víz fajhője.



26. ábra A víz fajhője a három halmazállapotban

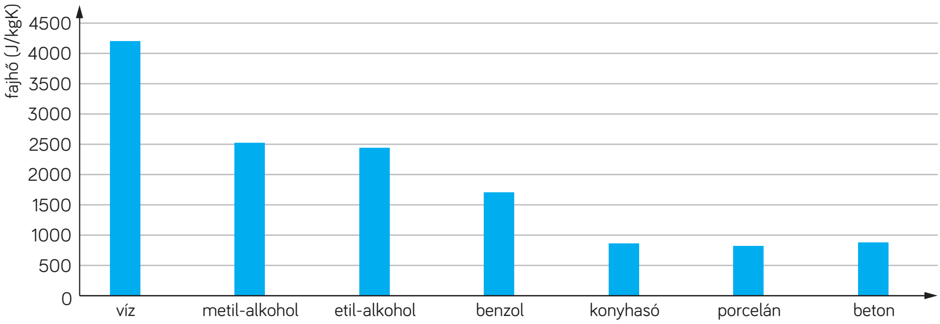
Érdemes néhány elemcsoport esetében is megvizsgálni a fajhőket. Például nézzünk néhány fémet, mondjuk az *alkálifémeket,* az *alkáliföldfémeket,* és legyen egy a periódusos rendszer végéről, az *urán!*



27. ábra Különböző fémek fajhői

A **27. ábra** alapján érdekes összefüggést lehet felfedezni az egyes csoportokon belül. Nevezetesen azt, hogy a periódusos rendszerben az oszlopban lefelé haladva csökken az elemek fajhője. Ez figyelhető meg a lítiumtól a céziumig, illetve a berilliumtól a báriumig. Az ábrázoltak közül az uráné a legkisebb, melynek a legnagyobb a rendszáma, illetve a tömegszáma is a vizsgált fémek esetében. Tehát a fémek fajhője minden bizonnyal függ a tömegszámtól, mégpedig azzal fordított arányban lehet. Minél nagyobb egy anyag atomjának a tömege, annál kisebb az anyag fajhője.

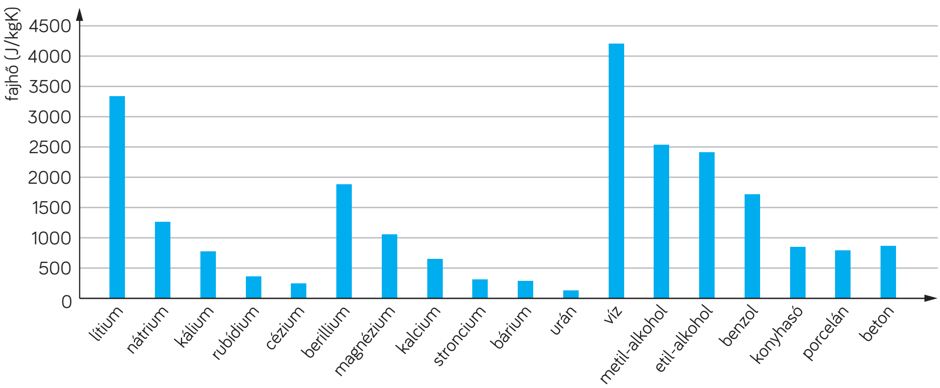
Az alábbi grafikonon néhány vegyület fajhőjét ábrázoltuk:



28. ábra Különböző vegyületek/keverékek fajhői

A **28. ábra** alapján azt lehet elmondani, hogy a vegyületek/vegyületkeverékek (porcelán, beton) fajhője rendkívül különböző lehet.

Érdemes lehet a két ábrában ábrázolt anyagok fajhőit egy ábrában is megjeleníteni, esetleg még továbbiakkal is kiegészíteni **(29. ábra)**. Melyik anyagnak a legnagyobb a fajhője? Milyen következményei vannak ennek?



29. ábra Különböző anyagok fajhői

Észrevehetjük, hogy a víznek kiemelkedően nagy a fajhője, aminek a földi időjárás alakulásában van óriási szerepe.

Kiegészítési lehetőségek a felsőbb évfolyam számára:

- gázok állandó térfogaton és állandó nyomáson vett fajhője,
- a fajhő hőmérsékletfüggése.

A MÓLHŐ – EREDETI ADATOK EXCELBEN

A foglalkozás jellemzői

15-20' 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
Eredeti mérési adatok kezelése, történeti szöveg elemzése és értékelése.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, oksági gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
szövegértés, mérési adatok vizuális megjelenítése, függvényábrázolás

Fejlesztett tartalmi tudás:
A fajhő, mólhő fogalmak és az anyag részecskeképének elmélyítése.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete

- A fajhő fogalmának átismétlése
- Néhány számításos feladat a fajhő fogalmának felhasználásával
- Az eredeti adatokat tartalmazó történeti szöveg elolvasása, majd a feltett kérdések megválaszolása
- Excel-ábrák elkészítése

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: fajhő, móltömeg, mólhő, periódusos rendszer.

Tanulói feladatlap

Olvassátok el a szöveget, majd válaszoljatok a kérdésekre!

Az anyagok fajhőjét két francia kutató tette alapos vizsgálat tárgyává a 19. század elején, Pierre-Louis Dulong (Rouen, 1785 – Párizs, 1838) és Alexis-Thérèse Petit (Vesoul, 1791 – Párizs, 1820) „A hőelmélet néhány fontos kérdésének vizsgálata" című cikkükben, mely az *Annales de Chimie et de Physique* francia folyóiratban jelent meg 1819-ben. Ebben kimutatták, hogy a fajhő bizonyos esetekben fordítottan arányos a relatív atomtömeggel. Eredeti, a cikkben szereplő mérési eredményeik a **15. táblázatban** láthatók.

Anyag	Vízhez viszonyított fajhő	Oxigénhez viszonyított atomsúly	Szorzat
Bizmut	0,0288	13,30	0,3830
Ólom	0,0293	12,95	0,3794
Arany	0,0298	12,43	0,3704
Platina	0,0314	11,16	0,3504
Ón	0,0514	7,35	0,3778
Ezüst	0,557	6,75	0,3760
Cink	0,0927	4,03	0,3736
Tellúr	0,0912	4,03	0,3675
Réz	0,0949	3,96	0,3755
Nikkel	0,1035	3,69	0,3819
Vas	0,1100	3,39	0,3731
Kobalt	0,1498	2,46	0,3685
Kén	0,1880	2,01	0,3781

15. táblázat Néhány elem oxigénhez viszonyított atomsúlya és vízhez viszonyított fajhője

Idézetek az írásból:

„A számokra pillantva figyelemre méltóan egyszerű összefüggést fedezünk fel, és ebből olyan fizikai törvényre következtethetünk, amely az összes elemi anyagra kiterjeszthető és általánosítható. Ezek a szorzatok, amelyek a különböző atomok hőkapacitásait fejezik ki, olyan közel esnek egymáshoz, hogy a csekély különbségek semmi másból nem származhatnak, mint a hőkapacitások mérésével vagy a kémiai elemzéssel járó elkerülhetetlen hibákból, különösen akkor, ha meggondoljuk, hogy egyes esetekben a kétféle hiba egymást erősítheti az eredményben. Az általunk megvizsgált anyagok száma és sokfélesége miatt a most megmutatott összefüggést lehetetlen puszta véletlennek tekinteni. Jogosnak tartjuk ezért a következő törvény elfogadását: Az összes egyszerű test atomjának pontosan ugyanaz a hőkapacitása."
Később: „Bárhogyan vélekedjünk is erről az összefüggésről, a kémiai elemzés eredményének próbaköveként szolgálhat, és egyes esetekben ez lehet a legpontosabb módszer bizonyos kombinációk arányainak megállapítására. De ha további munkánk során semmilyen tényező nem gyengíti jelenlegi elképzelésünk valószínűségét, a törvény azzal a további előnnyel is jár, hogy jól definiált, egységes módszert ad a közvetlen vizsgálatba bevonható összes egyszerű test relatív atomtömegének megállapítására." (Forrás: http://chemonet.hu/hun/olvaso/histchem/ho/dp.html)

A szöveg alapján válaszolj az alábbi kérdésekre!

- Mi lehetett a kutatók hipotézise, amiért ezt az összehasonlítást megtették, illetve a sok mérést elvégezték?
- Alátámasztotta-e az adatsor a hipotézist?
- Napjainkban e helyett milyen adatokat használunk fel? Vajon a két kutató miért ezeket az adatokat használta?

Ábrázold az eredeti adatokat!

Nézz utána a napjainkban elfogadott értékeknek, és azokat is ábrázold!

Vizsgáld meg néhány só, például a konyhasó mólhőjének értékét! Először alkoss hipotézist, hogy mekkora lehet a mólhő értéke, majd nézz utána a mért adatoknak!

Lehetséges megoldás
Érdekes megfigyelni, hogy egyes atomok hőkapacitásáról beszélnek a szerzők. Ma ezt úgy mondanánk, hogy azonos darabszámú atomokból álló anyagmennyiségek, melyek egységéül a mólt használjuk. Szóval az azonos számú atomot tartalmazó anyagdarabok hőkapacitása azonos. Ez volt a *hipotézis,* melyet a mérések ragyogóan alá is támasztottak.

Érdekes megfigyelni, hogy az atomtömegeket az oxigénhez viszonyították, mivel abban az időben még nem dőlt el egységesen, hogy mi a viszonyítási alap. A fajhőket pedig a vízhez, mely napjainkban nem viszonyszám. Ennek oka valószínűleg az lehetett, hogy a fémek fajhőjét vízben mérték. Például hideg vízbe tették a felmelegített fémdarabot, és mérték a kialakuló közös hőmérsékletet.

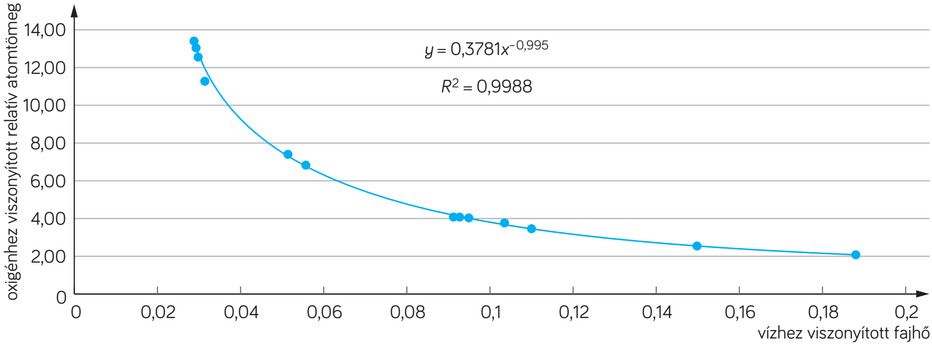
A tanulói mérésnél célszerű forrásban lévő vízben tartani a mérendő fémdarabot, hiszen így tudjuk, hogy 100 °C-os a hőmérséklete, majd gyorsan át kell tenni a fémet hideg vízbe és mérni a kialakuló közös hőmérsékletet. Egyszerű közelítő mérésnél a kaloriméter hőkapacitását elhanyagolva a következő egyenlet írható fel a fém által a vízből felvett energiára:

$$c_{\text{fém}} \cdot m_{\text{fém}} \cdot \Delta T_{\text{fém}} = c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot \Delta T_{\text{víz}},$$

amiből a fém fajhőjének és a víz fajhőjének aránya kifejezhető.
De ténylegesen a vízzel együtt a kaloriméter is felmelegszik, így annak az energiafelvételét is figyelembe kell venni. Ehhez előbb meg kell határozni a kaloriméter hőkapacitását, amit különösen régebben, vízértéknek is neveztek. A kaloriméter vízértéke (m_{v}) alatt értjük azon vízmennyiség m_{v} tömegét, amelynek $c_{\text{v}} \cdot m_{\text{v}}$ hőkapacitása megegyezik a kaloriméter hőkapacitásával, vagyis azt a vízmennyiséget, amellyel a kaloriméter hőfelvétel szempontjából helyettesíthető.[6]

6 http://fft.szie.hu/fizika/fizika1/2016-17/lev/meres2_kalorimetria.pdf

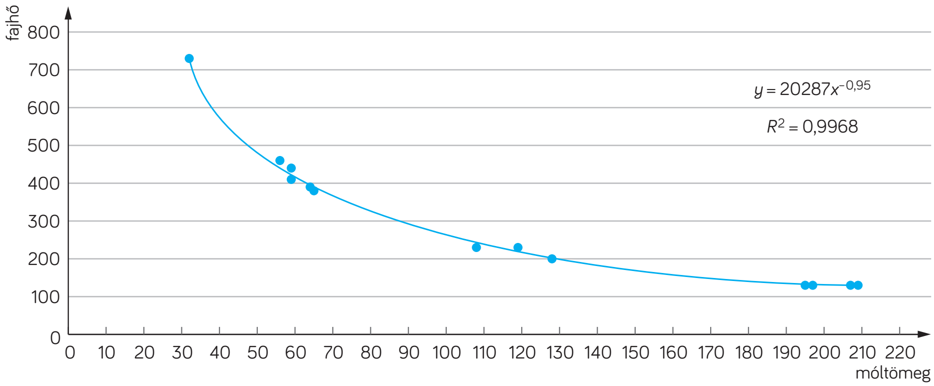
Azt láthatjuk, hogy az eredeti mérési adatok valóban nagyon jó közelítéssel egy hiperbolán helyezkednek el, tehát fordított arány van köztük **(30. ábra)**.



30. ábra Dulong és Petit mérési adatai Excel-ábrán

Anyag	Móltömeg (g/mol)	Fajhő (J/kgK)	Szorzat
Bizmut	209	130	27170
Ólom	207	130	26910
Arany	197	130	25610
Platina	195	130	25350
Ón	119	230	27370
Ezüst	108	230	24840
Cink	65	380	24700
Tellúr	128	200	25600
Réz	64	390	24960
Nikkel	59	440	25960
Vas	56	460	25760
Kobalt	59	410	24190
Kén	32	730	23360

A fajhő és a móltömeg kapcsolata: a mai adatok



31. ábra A fajhő és a móltömeg kapcsolata: a mai adatok és Excel-ábrájuk

A napjainkban mért adatok sem mutatnak jobb egyezést **(31. ábra)**!

HALMAZÁLLAPOT-VÁLTOZÁSOK

A foglalkozás jellemzői

15-20' 9-10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
hőtani alapfogalmak kialakítása, a forrás és olvadás jelenségek energetikai leírása; különböző anyagok olvadás- és forráshőjének összehasonlítása

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, oksági gondolkodás, kapcsolatteremtés a kémia tantárgy-gyal

Fejlesztett további készségek:
mérési adatok kezelése, ábrázolása az Excel program segítségével

Fejlesztett tartalmi tudás:
Az olvadáshő, forráshő fogalmának bővítése.

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete

- A forrás és az olvadás jelenségek megbeszélése
- Feladatmegoldás az olvadáshő- és a forráshőértékek felhasználásával
- Olvadás- és forráshőadatok keresése
- Adatok ábrázolása, különböző jellegű vizuális megjelenítése az Excel program segítségével

Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: olvadás, forrás, olvadáshő, forráshő.

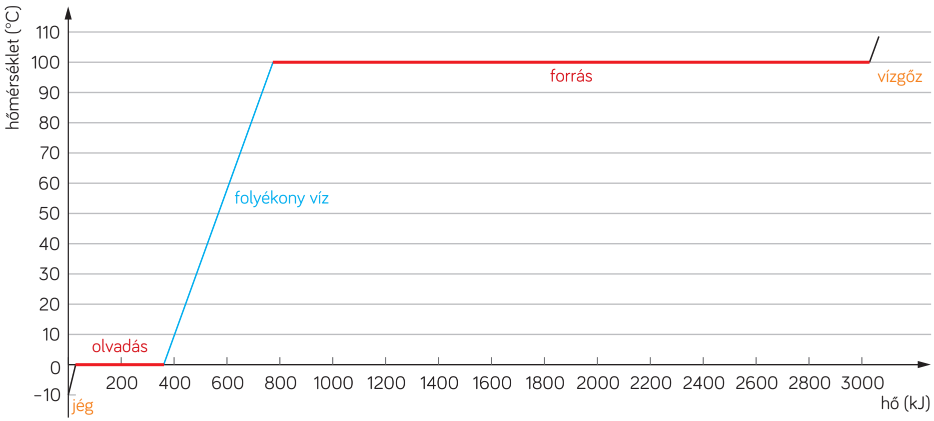
Feladat
A függvénytáblázat nagyon sok, az anyagok különböző tulajdonságait jellemző adatot tartalmaz, melyeket érdemes vizsgálat alá vonni és értelmezni. Vizsgáljuk meg a különböző anyagok olvadás- és forráshőjét, hasonlítsuk össze azokat!

- Alkossunk összehasonlítási szempontokat!
- Készítsünk Excel-ábrát a szemléletessé tételhez!

Lehetséges megoldás
Az olvadás és a forrás jelenségének vizsgálata során szokás ábrázolni a hőmérséklet alakulását az idő függvényében. Jellegzetes tapasztalat, hogy amíg a halmazállapot-változás tart, addig nem változik a hőmérséklet, mely mint konstans függvényrészlet jelenik meg. Mivel e közben folyamatosan melegíteni kell az anyagot, ezért a hőmérséklet a felvett hő függvényében is hasonló képet mutat.

De miként nézhet ki az ábra, ha mindkét halmazállapot-változást ugyanabban a grafikonban szeretnénk ábrázolni?

Nézzük meg a víz esetében, ha 1 kg −10 °C-os vízből indulunk ki **(32. ábra)**!



32. ábra Az 1 kg víz hőmérsékletének alakulása a felvett hő függvényében

Az ábra elég megdöbbentő. Mi is olvasható le róla? Szembetűnő, hogy ahhoz, hogy a folyékony halmazállapotú víz teljes mennyisége vízgőzzé alakuljon, jóval nagyobb energiát kell befektetni, mint az olvadás esetében. Miért szükséges jóval több energia a forráshoz, mint az olvadáshoz?

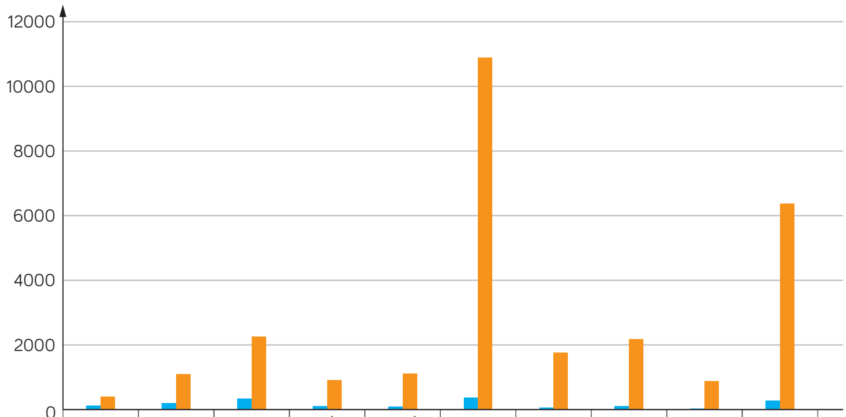
A magyarázathoz az anyag részecskemodelljét kell felhasználni, és figyelembe venni, hogy a részecskék vonzzák egymást. Az olvadás során a szilárd halmazállapotú jég kristályos rendje bomlik fel csupán, míg a forrásnál az egymásba kapaszkodó részecskék távolodnak el. Ez utóbbihoz kell a jóval nagyobb energia.

Kutatási kérdés
Ez vajon más anyagok esetében is így van?

Hipotézis
A részecskemodell alapján leírtak szerint az várható, hogy igen.

Vizsgálat
Hogyan tudnánk a hipotézist megvizsgálni? Nézzük meg, hogy a többi anyag esetében is jóval nagyobb-e a forráshő, mint az olvadáshő! A függvénytáblázatból érdemes néhány anyag esetében kikeresni az olvadás- és forráshő értékeket. Ebben az esetben a válaszhoz *nem saját mérési adatokat* kell felhasználni, hanem *adatbázisból* kell a megfelelőket kikeresni.

A szemléletessé tételhez érdemes néhány adatot diagramon is ábrázolni. Az a szemléletes diagram, mely vagy oszlopok magasságaként, vagy vonal hosszával jelzi az egyes értékek nagyságát egymáshoz viszonyítva. A diagramok tervezését is célszerű a tanulókra bízni **(33/a és b ábrák)**.



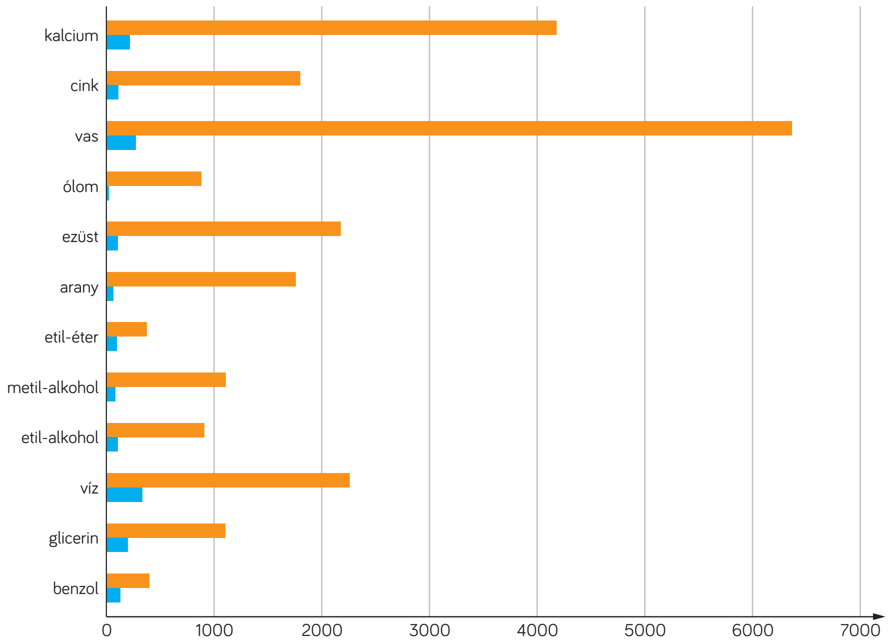
	benzol	glicerin	víz	etil-alkohol	metil-alkohol	alumínium	arany	ezüst	ólom	vas
olvadáshő (kJ/kg)	127,3	200,6	333,7	106,8	83,7	360,5	64,9	104,3	23,9	272,2
forráshő (kJ/kg)	395,7	1101,2	2256,4	906,1	1109,6	10886,2	1758,5	2177,2	879,2	6364,2

33/a ábra Különböző anyagok olvadás- és forráshője oszlopdiagramon

Tanulmányozzuk a grafikonokat, és tegyünk különböző összehasonlításokat!

- Milyen általános megállapítást lehet tenni bármilyen anyag esetében az olvadáshő és a forráshő értékeket összehasonlítva?

- Mit mondhatunk a fémek forráshőjéről a vegyületekével összehasonlítva? Mi lehet a különbség oka?
- Keressetek további anyagokat, és hasonlítsátok össze az olvadás- és a forráshőjüket!



	benzol	glicerin	víz	etil-alkohol	metil-alkohol	etil-éter	arany	ezüst	ólom	vas	cink	kalcium
olvadáshő (kJ/kg)	395,7	1101,2	2256,4	906,1	1109,6	376,8	1758,5	2177,2	879,2	6364,2	1800,4	4178
forráshő (kJ/kg)	127,3	200,6	333,7	106,8	83,7	98,4	64,9	104,3	23,9	272,2	111,4	216,5

33/b ábra Különböző anyagok olvadás- és forráshője

Amint az az ábrákból látható, a forráshő minden anyag esetében sokkal nagyobb, mint az olvadáshő. A fémek részecskéi között fémes kötés van, ami elsőrendű kölcsönhatás. A forráshő értéke ezért magasabb, hiszen nehezebb elszakítani egymástól a részecskéket. A felsorolt vegyületek esetében az elsőrendű kölcsönhatás a molekulákon belül van, a molekulák közt csak másodrendű a kölcsönhatás, ami gyengébb. Ezért jóval kevesebb energia kell a molekulák elszakításához.

Az is látható, hogy több anyag esetében a vízzel összehasonlítva az olvadáshő többszöröse a forráshőnek. Míg a víz esetében ez az érték csak kb. 7-szeres, addig a fémek esetében jóval nagyobb.

A VÍZ SŰRŰSÉGÉNEK HŐMÉRSÉKLETFÜGGÉSE – TAPASZTALATI TÖRVÉNY

A foglalkozás jellemzői

10' 9-10.

A feladat célja, rövid leírása:
mérési adatok elemzése alapján tapasztalati törvény felállítása

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, oksági gondolkodás, következtetés

Fejlesztett további készségek:
adatok ábrázolása, az Excel program használata

Fejlesztett tartalmi tudás:
a víz sűrűségének hőmérsékletfüggése

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

A foglalkozás menete

- A vízről tanultak felelevenítése
- Adatok keresése
- Adatok ábrázolása, különböző jellegű vizuális megjelenítése az Excel program segítségével

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket: a sűrűség fogalma, a víz sűrűségének hőmérsékletfüggése.

Feladat
Ismert tény, hogy a folyékony halmazállapotú víz érdekesen viselkedik a hőmérséklet emelkedésének hatására. 4 °C-on a legnagyobb a sűrűsége, tehát a sűrűséget a hőmérséklet függvényében ábrázolva egy maximummal rendelkező görbét kapunk.

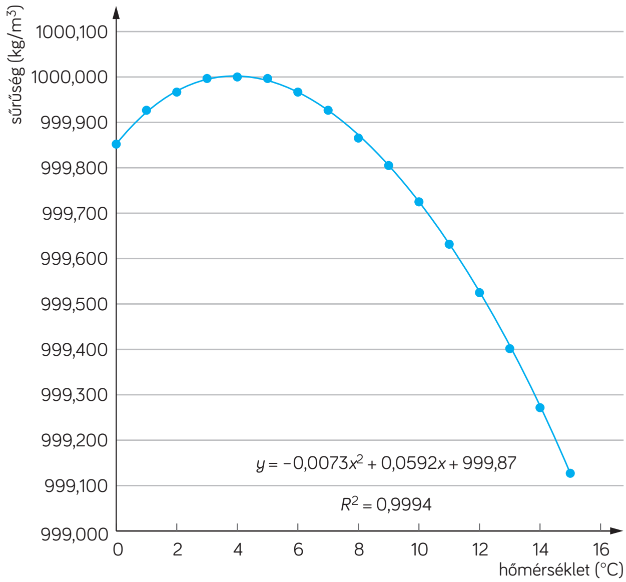
Keressünk minél pontosabb mérési adatokat, és ábrázoljuk azokat!

Próbáljunk függvényt illeszteni az adatokra! Próbálkozzunk a polinomos közelítéssel **(34. ábra)**!

Lehetséges megoldás

A feladatok megoldása során érdemes megbeszélni azt, hogy a jelenségek matematikai leírása és értelmezése különböző szintű lehet. Van nagyon sok, úgynevezett tapasztalati törvény, melyen azt kell érteni, hogy az empirikus adatokhoz megpróbálunk valamilyen függvényt illeszteni. Ezekhez általában kvalitatív oksági magyarázatok tartoznak, a függvény tényleges alakja nem vezethető le alapvetőbb törvényekből.

T (°C)	sűrűség (kg/m^3)
0	999,857
1	999,926
2	999,967
3	999,992
4	1000,000
5	999,991
6	999,970
7	999,929
8	999,876
9	999,808
10	999,727
11	999,632
12	999,524
13	999,404
14	999,271
15	999,126



34. ábra A víz sűrűségének változása a hőmérséklet függvényében

Amint az ábráról látható, a víz sűrűségének hőmérsékletfüggéséhez is rendelhető egy összefüggés, amely tapasztalati törvényként is felfogható. A mérnöki gyakorlatban sok ilyen összefüggést használnak.

MODERN FIZIKA

A PLANCK-ÁLLANDÓ MEGHATÁROZÁSA FOTOEFFEKTUS SEGÍTSÉGÉVEL

A foglalkozás jellemzői

10' 11.

A feladat célja, rövid elírása:
mérési adatokat tartalmazó táblázat, illetve függvény paramétereinek értelmezése, abból állandók meghatározása számítással adott törvényszerűség felhasználásával

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, adatok értelmezése, a matematikai tudás transzferálás a fizikába

Fejlesztett tartalmi tudás:
a kilépési munka értelmezése

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép

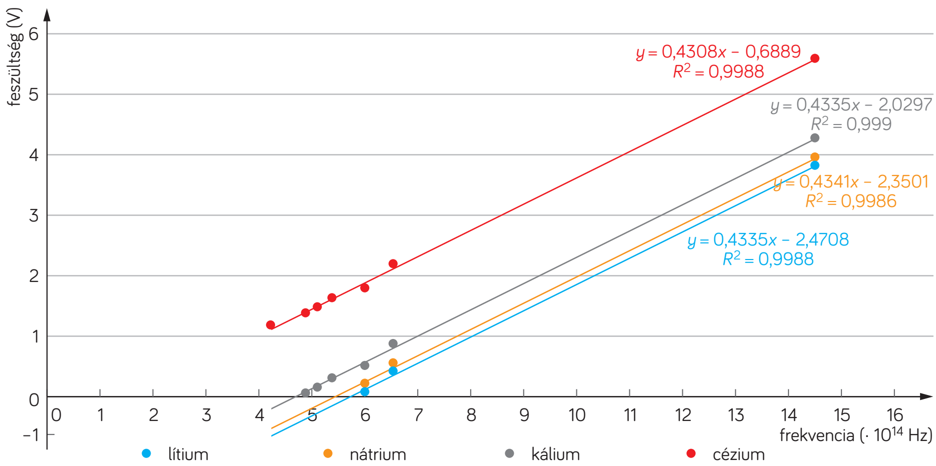
Előzetes tudásként feltételezzük a következő fogalmak ismeretét: fotoeffektus, kilépési munka, Planck-állandó.

Feladat
Az alábbi ábrán különböző anyagból készült fotocellákon mérhető feszültségek láthatók a megvilágító fény frekvenciájának a függvényében **(35. ábra).**

- Magyarázd meg a grafikonok lefutását!
- Mi a hasonlóság és mi a különbség az illesztett egyenesek között?
- Mi ennek az oka?
- Becsüld meg a Planck-állandót a grafikonok segítségével!
- Becsüld meg az egyes fémek kilépési munkáját!

Lehetséges megoldás
Az Einstein-féle fényelektromos egyenlet: $h \cdot f = W + e \cdot U$.

Innen $U = \frac{h}{e} f - \frac{W}{e}$.



35. ábra A fotocellán mérhető feszültség a megvilágító fény frekvenciája függvényében

Vagyis az egyenesek meredekségeiből a Planck-állandót, a tengelymetszetekből pedig az adott fém kilépési munkáját lehet meghatározni az elektron töltésének ismeretében.

A meredeksége mindegyik grafikonnak közelítőleg azonos, hiszen az h/e. Míg a tengelymetszetek különbözőek, hiszen a kilépési munkák mások, azok függnek az anyagi minőségtől.

meredekség (m): 0,4308
0,4341
0,4335
0,4335
átlag: $0{,}4330 \cdot 10^{-14}$ hiszen a frekvencia 10^{14} Hz-ben szerepelt.

Az elektron töltése $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
Innen a Planck-állandó: $h = m \cdot e = 0{,}69 \cdot 10^{-33}$ Js $= 6{,}9 \cdot 10^{-34}$ Js.
Az irodalmi érték $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js.
A kilépési munkák számítása: $W =$ metszéspont $\cdot\ e$.

Metszéspont	W (aJ)
0,6889	0,110224
2,0297	0,324752
2,3501	0,376016
2,4708	0,395328

RADIOAKTÍV PREPARÁTUM INTENZITÁSÁNAK TÁVOLSÁGFÜGGÉSE – EREDETI ADATOK ÁBRÁZOLÁSA

A foglalkozás jellemzői

10' 11.

A feladat célja, rövid elírása:
eredeti mérési adatok értelmezése és grafikus megjelenítése mai eszközökkel

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, kritikai gondolkodás, hipotézisalkotás, adatok értelmezése

Fejlesztett egyéb készségek:
szövegértés, adatok ábrázolása

Fejlesztett tartalmi tudás:
a radioaktív sugárforrás tulajdonságai

Eszközök:
számítógép

Előzetes tudásként feltételezzük a radioaktív sugárforrás fogalmának ismeretét.

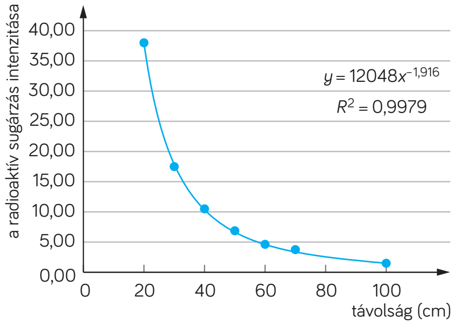
Feladat
Marie Curie doktori értekezésében a radioaktív sugárzás intenzitásának a forrás távolságától való függését is vizsgálta. Dolgozatában az alábbi adatsor, illetve számítás található (**16. táblázat**).

- Mi lehetett Marie Curie *hipotézise,* amelynek bizonyítására a 3. oszlopban található számítást elvégezte?
- Az adatok alapján mit lehet elmondani a radioaktív sugárzás távolságfüggéséről? Ez *igazolja* a hipotézist? Készítsünk az adatsort felhasználva Excel-grafikont, amely ezt szemlélteti! Célszerű ehhez minden adatot felhasználni?

d (cm)	i	$i \cdot d^2$
10	127,00	12700
20	38,00	15200
30	17,40	15660
40	10,50	16800
50	6,90	17250
60	4,70	16920
70	3,80	18620
100	1,65	16500

16. táblázat Marie Curie mérési adatai

Lehetséges megoldás
Az lehetett a hipotézis, hogy az intenzitás a távolság négyzetének reciprokával csökken. Az első adatok kivételével – melyeket ezért az ábrázolásnál célszerű elhagyni – valóban elég jó közelítéssel azonosak a szorzatok. A görbéhez illesztett függvény is igazolja Marie CURIE összefüggését.



36. ábra A radioaktív sugárzás intenzitásának távolságfüggése: Marie Curie adatainak Excel-ábrája

A HAFNIUM FELFEDEZÉSE – SZÖVEGFELDOLGOZÁS

A foglalkozás jellemzői

30' 10.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
kutatásmódszertani ismeretek bővítése szakszöveg értő olvasása és elemzése révén

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
következtetés

Fejlesztett további készségek:
szövegértés

Fejlesztett tartalmi tudás:
a hafnium felfedezésének története

Fejlesztett procedurális tudás:
a kutatás lépéseinek azonosítása

Eszközök:
füzet, íróeszköz

A foglalkozás menete
- A Bohr-modell ismétlése
- A szöveg elolvasása egyéni munkában
- Írásos válasz a kérdésekre, egyéni vagy csoportmunkában
- A válaszok megbeszélése

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket: periódusos rendszer, az atomok elektronszerkezete, Bohr-modell.

Feladat

Olvasd el a szöveget, majd válaszolj a kérdésekre!

A hafnium felfedezése

A ritkaföldfémek felkutatása egészen a 18. század végére nyúlik vissza. Az elválasztási módszerek finomodásával sorra találták meg az ittriumot, cériumot és társaikat, az egymáshoz kémiailag igen hasonló elemeket. Nehézséget okozott azonban, hogy egyrészt nem volt számukra hely a periódusos rendszerben, másrészt megjósolhatatlannak tűnt, mennyi is van belőlük. Gondoljuk meg a kérdések súlyosságát! Mengyelejev tudta, hogy bizonyos elemek még nem ismeretesek, ezért számukra bizonyos kockákat üresen hagyott, ám az üresen hagyottak között nem szerepeltek olyan elemek, amelyek egészen olyannak mutatkoztak, mint a lantán, vagyis azok, amelyeket ritkaföldfémeknek neveztek el. Márpedig, ha léteznek a lantánhoz hasonló elemek, melyeknek nincs helyük a táblán, talán mindenféle egyéb ismeretlen elemek is létezhetnek, talán a periódusos rendszer nem adja meg az összes lehetséges földi elem teljes térképét.

A periódusos rendszer megőrzésére általánosan elfogadták Brauner cseh kémikus 1899-ben tett javaslatát, amely szerint a ritkaföldfémeket a lantánéval azonos, egyetlen kockába kell írni és külön, általában a táblázat alatt fölsorolni. Ez a praktikus megoldás persze nem tisztázta az elvi kérdéseket, köztük azt, *hány ritkaföldfém létezik, milyen hosszú a táblázat alatti lista.*

A probléma megoldásához hozzájárult a Moseley által 1913-ig kifejlesztett röntgenspektroszkópia, illetve a vele kapcsolatban kialakított rendszám fogalma. Ez utóbbi a periódusos rendszerben elfoglalt hely és a röntgenspektroszkópiai adatok között teremt összefüggést: az adatok alapján meg lehet határozni valamely elem helyét a táblán. A lantán rendszáma 57-esnek adódott, ebbe a kockába kellett beírni a ritkaföldfémeket. De nem tudták, vajon a még ismeretlen 72-es rendszámú elemmel végződik-e a ritkaföldfémek sora vagy ez már ismét a táblára kerül.

Az egész ügy egy Niels Bohrral folytatott beszélgetés során került Hevesy látókörébe. Bohr 1913-ban publikálta atommodelljét, ám ez csupán a hidrogén, hélium és lítium szerkezetét magyarázta meg. Hevesy visszaemlékezése szerint *„1922 januárjában a vele* [mármint Bohrral] *tett séta közben tudtam meg, hogy kiterjesztette elméletét az egész periódusos rendszerre, és ezzel megmagyarázta többek között a ritkaföldfémek elhelyezkedését is a periódusos rendszerben. Elmélete szerint ezek száma csupán tizennégyre korlátozódik, tehát az ismeretlen 72. számú elem nem lehet ritkaföldfém, hanem titán homológ.”* Hevesy azzal nyugtatta Bohrt, hogy komoly kémikus nem hisz néhány bizonytalan spektrumvonalnak: elő kell állítani az elemet.

Hevesy 1922 nyarán, Magyarországon geokémiai munkákat olvasott, és Bohr elméletére támaszkodva arra az álláspontra jutott, hogy a cirkónium ásványban kell keresni a 72. számú elemet. Hevesy az ásványból eltávolította az oldható komponenseket, és a mintában Costerrel azonnal ki tudták mutatni a 72. elem jellemző spektrumvonalait. Az elemet ők nevezték el hafniumnak.

A felfedezést drámai körülmények között jelentették be. Bohr már átvette a Nobel-díjat Stockholmban, és a következő nap kellett megtartania előadását a Svéd Tudományos Akadémián. Hevesy este értesítette telefonon Bohrt a mérés pozitív eredményéről, és már rohant is a koppenhágai állomásra, hogy jelen lehessen másnap az előadáson, amikor Bohr nyilvánosságra hozza az eredményt. Az előadás vége felé tett bejelentés csakugyan óriási izgalmat keltett a hallgatóságban, majd az egész nemzetközi vegyésztársadalomban.

Palló, G. (2001). A hafnium-történet és Hevesy György Nobel-díja. *Fizikai Szemle, 51* (5-6), p. 154 nyomán

Válaszolj a szöveg alapján a következő kérdésekre!

- Mik voltak a kutatási kérdések?
- Mi volt Bohr hipotézise? Mire alapozta a hipotézisét?
- Milyen modellt alkalmaztak?
- Milyen kísérletet, empirikus vizsgálatot tervezett Hevesy?
- Milyen kísérleteket, empirikus vizsgálatokat végzett Hevesy?
- Hogyan elemezte a kapott adatokat?
- Milyen következtetést vont le?

Lehetséges tanulói válaszok a feltett kérdésekre

Kutatási kérdések
Hány ritkaföldfém létezik?
Ezek hol és hogyan helyezkednek el a periódusos rendszerben?
Az addig ismeretlen 72. rendszámú elem hol helyezkedik el a periódusos rendszerben?

Hipotézis
A 72. rendszámú elem már nem az f mezőben, hanem a főtáblán, a d mezőben helyezkedik el, tehát kémiai tulajdonságai a titánhoz és a cirkóniumhoz hasonlóak a Bohr-modell alapján.

Milyen modellt alkalmaztak?
A Bohr-modellt.

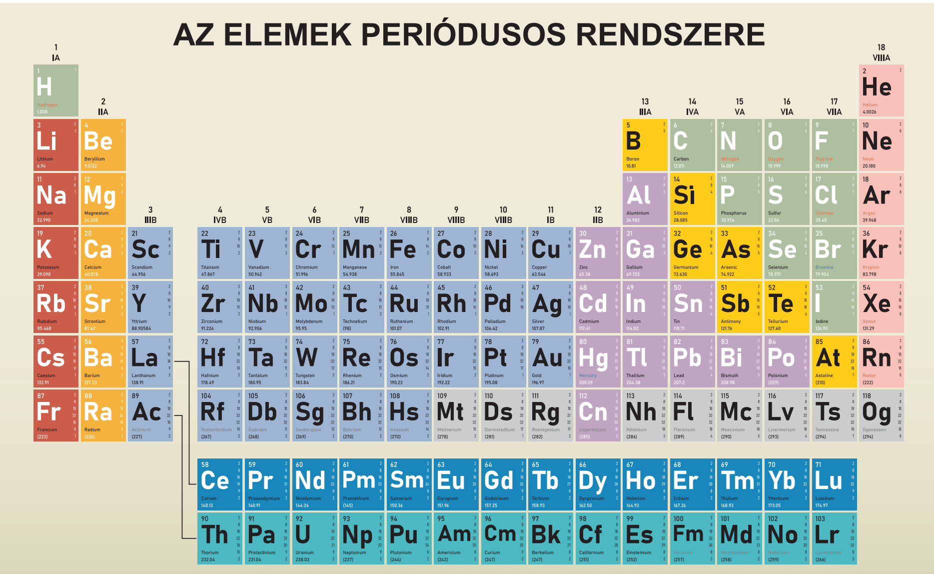
A kísérletek, empirikus vizsgálatok megtervezése
A cirkónium ásványban kell keresni a 72. számú elemet, abból kell kivonni.

Vizsgálat
Hevesy az ásványból eltávolította az oldható komponenseket, továbbá spektroszkópiai vizsgálatokat is végzett.

Az adatok elemzése, eredmény
A mintában kimutatta a 72. elem jellemző spektrumvonalait.

Következtetés
Felfedezték a keresett 72-es rendszámú elemet.

A felfedezés a Bohr-elmélet egyik *prediktív állítását* igazolta. E szerint a ritkaföldfémek száma 14-re korlátozódik, amiből az következett, hogy a 72. elem nem lehetett ritkaföldfém, hanem csak a titánhoz és a cirkóniumhoz hasonló kémiai tulajdonságokkal rendelkező elem. Bohr elmélete szerint a lantántól kezdve nem a külső elektronhéj épül tovább, hanem a még telítetlen 4f alhéj, ahol 14 elektron fér el, és ezen alhéj kiépülésével (a 71. elemmel) zárul le a ritkaföldfémek sora.



37. ábra Egy „jó" periódusos rendszer

A 72. elem tehát nem tartozhat ide. Hevesy ennek alapján 1922 nyarán Magyarországon töltött szabadsága alatt elkészítette a 72. elem felkutatását célzó *kutatási tervét.* E szerint azt nem ritkaföldfém-ásványokban, hanem a cirkónium ásványaiban kereste *(adatgyűjtés),* és meg is találta 1923-ban Koppenhágában. Ezért a 72.

elemet Koppenhága latin neve után keresztelt hafniumra. 30 dolgozata foglalkozik ezzel az elemmel. Többek szerint már ezért a felfedezéséért megérdemelte volna a Nobel-díjat. A **37. ábrán** egy jó periódusos rendszert mutatunk, mert csak a 14 darab *f* mezőbeli elemet mutatja az alsó két sorban! Sok esetben 15 elem található ebben a két sorban, a lantán és az aktínium is, ami nem jó! Azok még *d* mezőbeli elemek.

SÖTÉT ANYAG – SZÖVEGFELDOLGOZÁS, EREDETI ADATOK ÁBRÁZOLÁSA

A foglalkozás jellemzői

90'

9., 11.

A foglalkozás célja, rövid leírása:
A probléma megértése. Fontos, hogy a diákok lássák, hogy a középiskolában tanultak alapján képesek megérteni napjaink egyik fontos tudományos problémáját. Lássák, hogy a tudomány nem lezárt rendszer, vannak olyan alapvető kérdések, melyeket nem tudunk megválaszolni, és valójában sejtelmünk sincs a megoldásról. Vannak ugyan elképzelések, de egyik sem tekinthető megnyugtató válasznak. Ilyeneknek a diákok utána is nézhetnek.
Mivel a probléma észlelésében egy kutatónő is részt vett, így a lányok számára bemutatható, hogy a tudományos kutatás számukra is érdekes és vonzó hivatás lehet.

Fejlesztett gondolkodási készségek, képességek:
összehasonlítás, arányossági gondolkodás, kritikai gondolkodás

Fejlesztett további készségek:
tudományos ismeretterjesztő szöveg értő olvasása, függvények ábrázolása

Fejlesztett tartalmi tudás:
a gravitációs vonzás egyetemességének bemutatása, a gravitációs törvények alkalmazása

Eszközök:
füzet, íróeszköz, számítógép, internet, Excel program

A foglalkozás menete

- A Naprendszerbeli bolygók sebességének ábrázolása
- A sebességfüggés elméleti levezetése a Newton-féle gravitációs törvényből
- Vera Rubin életének és munkásságának tanulmányozása
- Vera Rubin mérési adatainak ábrázolása
- Filozofikus szöveg elemzése

Előzetes tudásként feltételezzük a következő ismereteket: Kepler-törvények, Newton gravitációs törvénye, a körmozgás sebessége.

Kutatási kérdés
Van-e valamilyen összefüggés a bolygók átlagos keringési sebessége és a Naptól mért átlagos távolsága között?

Lehetséges hipotézisek

a) A két mennyiség egyenes arányban van egymással.

b) A két mennyiség fordított arányban van egymással.

c) A sebesség a távolság gyökével fordítottan arányos.

d) A sebesség a távolság négyzetével fordítottan arányos.

e) Nincs összefüggés.

Jelöld meg a szerinted lehetséges kapcsolatot!
Ábrázold az adatokat **(17. táblázat)**!

A bolygó neve	A bolygó távolsága (CSE)	A bolygó sebessége (km/s)
Merkúr	0,387	47,89
Vénusz	0,723	35,03
Föld	1	29,79
Mars	1,524	24,13
Jupiter	5,203	13,06
Szaturnusz	9,539	9,64
Uránusz	19,191	6,81
Neptunusz	30,061	5,43

17. táblázat A Naprendszer bolygóinak Naptól mért átlagos távolsága és sebessége

A Newton-féle gravitációs törvény és a Newton-törvények felhasználásával *mutasd be elméleti úton is az adatok közötti összefüggést!*

Hasonlítsd össze a kapott *eredményeket* a bejelölt *hipotéziseddel!*

Olvasd el a szöveget, majd válaszolj a kérdésekre!

Vera Rubin 1970. március 27-én döntött úgy, hogy az Androméda galaxist alkotó csillagok mozgását kezdi el tanulmányozni. Ellenőrizni szerette volna, hogy a csillagok úgy mozognak-e, ahogyan azt Newton gravitációs törvénye leírja.

Pusztán a látható anyagot figyelembe véve a tudósok korábban úgy vélték, hogy mivel a galaxisok tömege általában a középpontjuk környékén összpontosul, a rendszerek szélén lévő csillagoknak lassabban kellene haladniuk, mint a centrumhoz közelebb esőknek, ahogy ez a Naprendszer bolygói esetében így is van.

A Vera Rubin által használt spektrográf a csillagokban lévő kémiai elemek vonalas színképének megfelelő hullámhosszakon vonalakat rajzolt egy papírra. A kirajzolt vonalak helyzete a Doppler-effektusnak megfelelően tolódik el följebb vagy lejjebb a frekvenciaskálán, attól függően, hogy az adott csillag közeledik felénk vagy távolodik. Vera Rubin mérési módszere tehát a következő összehasonlításon alapult: hol helyezkedik el az adott anyag spektrumvonala a Földön előállított színképében, és hol a vizsgált csillag színképében. Az eltolódás mértékéből pedig a csillag sebességére lehet következtetni. A tapasztalta az volt, hogy az Androméda szélén lévő csillagok is épp olyan gyorsan mozogtak, mint a galaxis közepén lévők. Ez azonban nem felelt meg a Newton-féle gravitációs törvény alapján megfogalmazott várakozásoknak.

A következő két hónapban 200 mérést végzett el más galaxisok csillagai esetében is. Ezekben az esetekben is hasonló eredményeket kapott. Az összes sebesség „hibás lenne”? – tette fel a kérdést. Ezek a csillagok túl gyorsan mozogtak. A látható anyag által keltett gravitációs hatás nem lett volna elég a mért sebességhez.

Rubin számára két lehetséges magyarázat kínálkozott:

- Vagy Isaac Newton gravitációs törvényei rosszak (ezt a tudományos világ nehezen fogadta volna el),
- vagy az univerzumban olyan plusz anyag van, amely a mért furcsa jelenségért felelős, de a jelen csillagászati eszközökkel nem kimutatható.

Rubin a második magyarázatot választotta, és a plusz anyagot **sötét anyag**nak nevezte el (mivel nem volt sem látható, sem kimutatható). Számításai szerint a világegyetem 90%-ban sötét anyagból áll. Elméletét 1975-ben ismertette az American Astronomical Society találkozóján.

Válaszolj a következő kérdésekre!

- Mi volt Vera Rubin kutatási kérdése?
- Mi volt a hipotézise?
- Mire alapozta a hipotézisét?
- Milyen méréseket végzett Vera Rubin?
- Milyen vizsgálati módszert alkalmazott?
- Milyen eredményt kapott?
- Mire következtetett?

A mérésekhez felhasznált spektrumvonalak **(38. ábra)**:

The mean observed velocity of each region is tabulated in column (6). For a well-exposed plate, lines of Hβ; [O III] λλ4959, 5007; He I λ5876; [O I] λ6300; [N II] λ6548; Hα; [N II] λ6583; and [S II] λλ6717, 6731 are observed. In Figure 2 (Plate 2), we re-

A cikk 4. oldaláról

A hidrogén emissziós színképe. A vonalsorozat két legfényesebb tagja a hidrogén-alfa (vörös) és a hidrogén-béta (kék) vonal

38. ábra A Vera Rubin által használt spektrumvonalak

Az alábbi táblázat Vera Rubin cikkéből származik **(39. ábra)**.[7]

Ábrázoljátok az adatokat a Naprendszerhez hasonló formában, vagyis a csillagok keringési sebességét a centrumtól mért távolság függvényében!

Próbáljátok meg *értelmezni* a kapott grafikont!

Lehetséges megoldás

A **40. ábrán** látható pontokra függvényt illesztettünk, melyben az arányossági tényező a Nap tömegének és a gravitációs állandó szorzatának gyöke és még egy állandó, mivel a távolságot CSE-ben, a sebességet pedig km/s-ban mértük. Lehet linearizálni is a görbét, de mivel az Excelben ki tudjuk íratni a görbe egyenletét, erre nincs szükség. Látható, hogy a bolygók sebessége a Naptól mért távolság négyzetgyökével fordítottan arányos.

r (kpc)	V (km sec⁻¹)
0.	0
0.2. . . .	165
0.4. . . .	227
0.6. . . .	228
0.8. . . .	197
1.	154
2.	53
3.	99
4.	157
5.	201
6.	232
7.	254
8.	266
9.	272
10.	272
11.	268
12.	262
13.	254
14.	245
15.	236
16.	227
17.	220
18.	214
19.	209
20.	206
22.	203
24.	202

39. ábra A Vera Rubin cikkében található adatok

7 http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1970ApJ...159..379R&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

A sebesség és a távolság összefüggése

A mozgásegyenletet a következőképp írjuk fel:

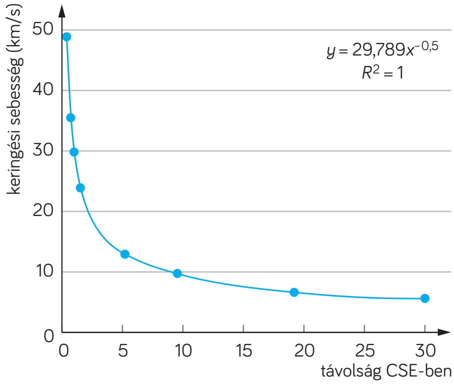
$$\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

ahol M a csillag, m a bolygó tömege, v pedig a bolygó sebessége.

Egyszerűsítve m-mel és R-rel:

$$\frac{\gamma \cdot M}{R} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{R}}$$

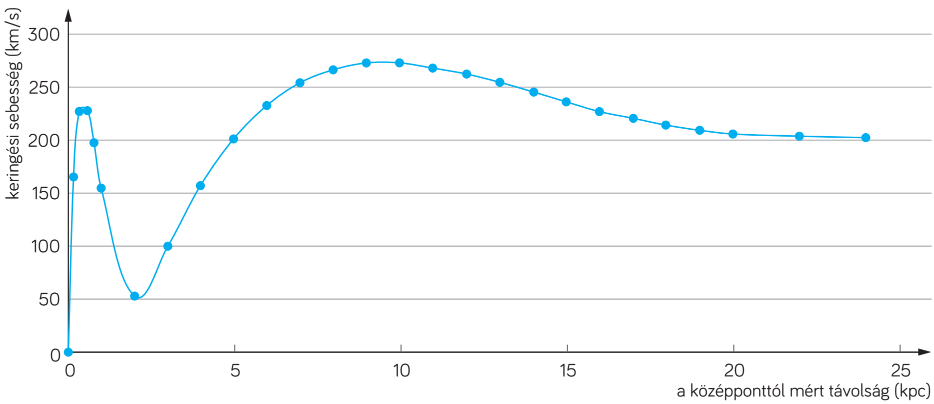


40. ábra A bolygók átlagos keringési sebessége és a Naptól mért átlagos távolsága közötti összefüggés

tehát a sebesség négyzete a Naptól mért távolság reciprokával arányos (vagy a sebesség a távolság gyökének reciprokával).

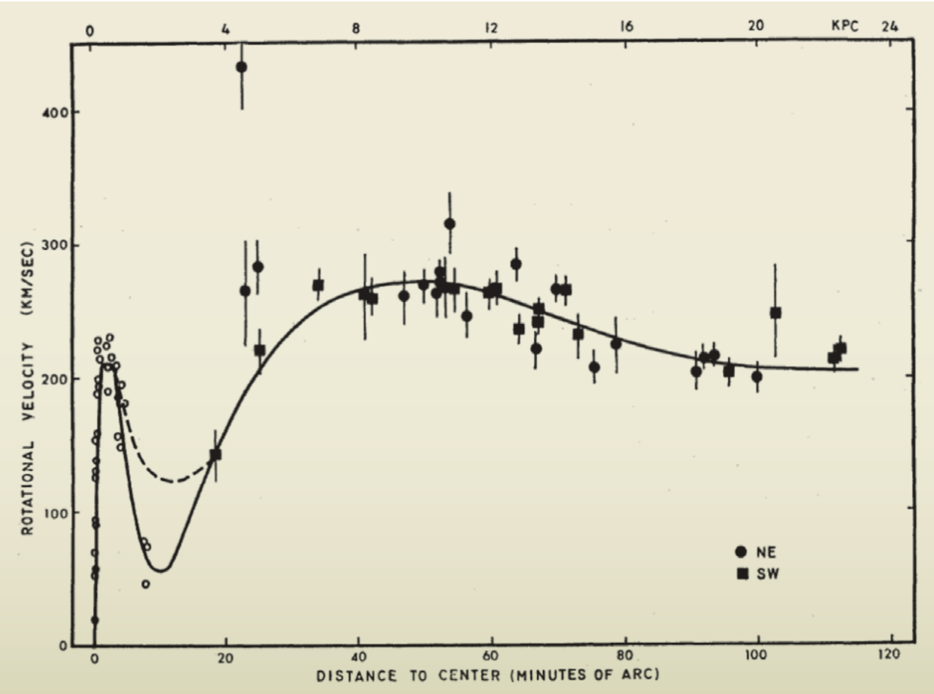
Az állandó SI-ben a $\gamma \cdot M$ négyzetgyöke ($= 1{,}15 \cdot 10^{10}$). Az illesztett Excel-függvény állandója (a 29,7) ez (a $\gamma \cdot M$ négyzetgyöke) osztva ezerrel (a km/s miatt) és a csillagászati egység gyökével, mert nem SI-ben vannak az adatok.

Az adatok alapján készíthető ábra **(41. ábra)**:



41. ábra Csillagok keringési sebessége a galaxis középpontjától mért távolság függvényében. Vera Rubin eredeti adataiból készült Excel-ábra

A Vera Rubin cikkében található ábra:



42. ábra A Vera Rubin cikkében található eredeti ábra

Kiegészítésként adható további témák

- Vera Rubin életének feldolgozása, cikkének felkutatása;
- ismeretterjesztő filmek keresése a sötét anyag témában;
- különböző vallások által alkotott elképzelések a világunk keletkezéséről és azok összehasonlítása;
- a sötét energia felfedezése, illetve különböző létező magyarázatok az univerzum tágulására. Ez utóbbi azért is érdekes, mivel a tanulók ezáltal olyan elemmel találkoznak, melyre többféle elképzelés is létezik, és napjainkban még nem tudunk dönteni ezek között. Egyik sem tud olyan empirikus előrejelzést tenni, melyet lehet keresni, és csak azzal az egyik elmélettel magyarázható.

IRODALOM

Dér, J., Radnai, Gy., & Soós, K. (1986). *Fizikai feladatok.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Galilei, G. (1632/1983). *Párbeszédek. A két legnagyobb világrendszerről a ptolemaiosziról és a kopernikusziról.* Bukarest: Kriterion Könyvkiadó. Fordította: M. Zemplén Jolán.

Gamov, G. (1965). *A fizika története.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Kindl, E. (2018). *Exobolygók a fizikaórán.* Szakdolgozat. ELTE, TTK.

Kis, T. (2011). A fa- és vasgolyó Hevesen versenyzett. *Fizikai Szemle, 61*(3), 101–104. http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz1103/kist1103.html

Nagy, M., & Radnóti, K. (2014a). A grafikus ábrázolás szerepe a fizika oktatásában – egy felmérés tükrében. *Fizikai Szemle, 64*(7–8), 272–278. http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz140708/NagyM_RadnotiK.pdf

Nagy, M., & Radnóti, K. (2014b). Nemlineáris jelenségek. In J. Pálfalvi (Ed.), *A játéktól a kutatásig* (pp. 58–71). Budapest: Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa.

Palló, G. (2001). A hafnium-történet és Hevesy György Nobel-díja. *Fizikai Szemle, 51*(5–6), 154–156. http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0105/pallo.html

Rubin, V. C., & Ford, K. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *The Astrophysical Journal, 159*(2), 379–403. http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1970ApJ...159..379R&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

Simonyi, K. (1978). *A fizika kultúrtörténete.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Stonawski, T. (2019). Mozgásszimulációk a légkörben. Hogyan írjunk érdekes szimulációkat középiskolában? *Fizikai Szemle, 69*(5), 163–168.

Straulino, S. (2008). Reconstruction of Galileo Galilei`s experiment: the inclined plane. *Physics Education, 43*(3), 316–321.

Sudár, M. (2019). *Újszerű oktatási módszerek alkalmazási lehetőségei a fizikatanításban.* Szakdolgozat. ELTE, TTK.

Szegedi, P. (2013). *Fizikatörténeti szöveggyűjtemény.* ELTE, TTK.

Zemplén, J., Szabadváry, F., & Kontra, Gy. (1963). *A kísérletezés úttörői a XIX. században.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Internetes források[8]

http://chemonet.hu/hun/olvaso/histchem/ho/dp.html

http://www.trappist.one/#

http://www2.ohm-hochschule.de/bib/textarchiv/Ohm.Bestimmung_des_Gesetzes.pdf

8 Utolsó letöltés időpontja: 2020. október 29.