1.

A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése

Terezinha Nunes
University of Oxford Department of Education

Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Bevezetés

A matematika az egyik legrégebbi tudományág, amely ma is érvényes forrásként használható az iskolai tananyag tervezéséhez. Bár nyilvánvalóan fontos az alkalmazhatósága a mindennapi életben, a matematika nagy részét mégis inkább abban a reményben oktatják, hogy a matematika elsajátítása általában is fejleszti a gondolkodást, csiszolja az elmét. A matematika szisztematikus megközelítési módokat kínál a tanulók számára a különféle problémák kezeléséhez és alkalmas a fizikai, biológiai és társadalomtudományok területén felmerülő helyzetek elemzésére és modellezésére. A matematikának a világ megértésében játszott szerepét nagyon világosan fogalmazta meg Galilei, amikor azt írta, hogy az univerzum, ez a hatalmas könyv, amely mindig nyitva áll a szemünk előtt, ám csak akkor érthető meg, ha először megtanuljuk olvasni azt a nyelvet, amelyen írták: a matematika nyelvét (*Sobel,* 1999).

A matematikával ellentétben a matematika tanításának és oktatásának tudományos kutatása viszonylag fiatal tudományág, mindössze egy évszázados. A vizsgálódásra érdemes kérdések és a kérdések megválaszolásához használt kutatási módszerek idővel sokat változtak, egy dolog azonban továbbra is központi kérdés maradt a fejlődéslélektanban és az

oktatásban: vajon a matematikatanulás javítja-e a gondolkodást, vagy a matematika tanulása csak azok számára áll nyitva, akik már elértek egy megfelelő gondolkodási szintet? Az általános kognitív képességek fejlesztése különösen fontos a rendkívül gyorsan változó társadalmi környezetben; ezért sürgető, hogy választ adjunk erre a kérdésre.

A modern fejlődéslélektanban kétféle, látszólag egymástól eltérő megközelítés próbált magyarázatot adni a kognitív fejlődésre. Egyrészt *Piaget* és munkatársai azokat a gondolkodási formákat elemezték, amelyek a gyermekeket fejlődésük során jellemzik, a gyerekek problémamegoldó stratégiáira (vagyis cselekedeteire és gondolkodására) és e stratégiák igazolására összpontosítva (*Inhelder* és *Piaget,* 1958; *Piaget* és *Inhelder,* 1974, 1975, 1976). A másik oldalon *Vigotszkij* kövezte ki az utat annak mélyebb megértéséhez, hogy a tanulók hogyan tudják a kulturális jelrendszerek (mint pl. a számrendszer, a gráfok és az algebra) segítségével kifejezni saját gondolataikat, majd gondolkodni és beszélni ezekről a külső jelekről, tárgyiasítva és gondolkodási eszközzé téve őket (*Vigotszkij,* 1971).

Egy egyszerű példával megvilágítható ez a szempont. Ha valaki megkérdezi tőlünk, hogy hány óra, azonnal az óránkra nézünk. Ahogy a mindennapi életben és a tudományban az időről gondolkodunk, azt befolyásolják az időmérő eszközeinkben, például karóráinkban megtestesülő matematikai viszonyok. Az állítjuk, hogy „egy nap 24 órából áll", mert az időt órákban mérjük; az 1 nap és az 1 óra közötti arány 24:1; az órák és a percek közötti arány 60:1, és a percek és a másodpercek közötti arány szintén 60:1. Az időt ennek a kulturális eszköznek – az órának – a segítségével jelenítjük meg, és az órába beépített matematikai viszonyok teszik lehetővé számunkra, hogy a nap időtartamát kifejezzük. Ennek a kulturális eszköznek a segítségév el finom különbséget tudunk tenni az idő és azon struktúrák között, amelyekben az időről gondolkodunk. E nélkül nem tudnánk időpontot egyeztetni a barátainkkal, megállapodni mondjuk 11 órában, majd azt mondani: „Elnézést, 10 percet késtem". Az időről nincs olyan pontos képzetünk, hogy a nap egy adott időpontjában pontosan meg tudnánk mondani, hogy 11 óra van, vagy megállapítani a különbséget 11 óra és 11:10 között. Ez a történetnek *Vigotszkij*-féle változata.

A történet *Piaget* által felvázolt változata akkor válik fontossá, amikor arról gondolkodunk, hogy a gyerekeknek mit kell megérteniük ahhoz, hogy megtanulják leolvasni az órát és összehasonlítani a különböző idő-

pontokat. Az óra számlapján lévő számoknak kétféle jelentése van: az órát és a percet mutatják. Ahhoz, hogy egy gyermek a perceket le tudja olvasni, képesnek kell lennie viszonyítani az 1-et az 5-höz, a 2-t a 10-hez, a 3-at a 15-höz stb. Ahhoz, hogy megállapítsa például az 1 óra 15 perc és a 2 óra 35 perc közötti intervallumot, tudnia kell, hogy egy óra 60 percből áll, és a 2 óráig eltelt perceket hozzá kell adnia a 2 óra után eltelt percekhez. Ezeket a gondolkodási folyamatokat társítani kell az eszközhöz annak érdekében, hogy a gyerek megtanulja használni azokat. Itt most nem kívánunk további példákat felhozni: elég világosnak látszik, hogy az óra használatának elsajátításához meg kell érteni a percek és órák közötti viszonyt, valamint ismerni az óra számlapján lévő számokat. A kutatások azt mutatják, hogy ez még egy nyolcéves gyermek számára is kihívást jelenhet (*Magina* és *Hoyles,* 1997).

Ebben a fejezetben elsősorban azokra a gondolkodási formákra koncentrálunk, amelyek a matematika tanulásához nélkülözhetetlenek, valamint azoknak a konvencionális matematikai jeleknek az elsajátítására, amelyek lehetővé teszik és strukturálják a gondolkodást. A fejezet első részében három fő kérdésre fordítunk kiemelt figyelmet: egész számok, racionális számok és feladatmegoldások matematikaórán. Mindegyik területen megkíséreljük feltárni a matematika és a hozzá kapcsolódó kulturális eszközök elsajátításának pszichológiai elveit. A fejezet az általános iskolai matematikatanulásra összpontosít, és az 5-12 éves korú gyerekekkel végzett kutatások eredményeit veszi alapul. Nem foglalkozunk az idősebb korosztályba tartozó gyermekekkel, és nem véljük úgy, hogy az itt felvetett kérdések megválaszolása elegendő a későbbi matematikatanulás megértéséhez.

Azokra a gondolkodási folyamatokra, amelyeknek fejlesztésével az iskolai matematikatanítás foglalkozik, hatással vannak az iskola előtti és az iskolán kívüli tapasztalatok is. A matematikában tanultak felhasználására más tantárgyakban is sor kerül, ahogy a más tárgyakban szerzett tapasztalatok is gazdagítják a matematika tanulását. Különösen a természettudomány tanítása segítheti a matematikai gondolkodás fejlődését, elsősorban tapasztalati alapot és gyakorlóterepet szolgáltatva a matematikában is fejlesztendő gondolkodási folyamatoknak. Vannak azonban olyan területek, mint például a szimbólumok használata, amelyeken a matematikának meghatározó szerepe van, ezért ebben a fejezetben ezekre fektetjük a fő hangsúlyt. Ugyanakkor, bár kevésbé részletesen, áttekint-

jük azokat a gondolkodási folyamatokat is, amelyeket a matematikában és más tárgyakban egyaránt fejlesztendőnek tartunk.

Matematikaoktatás és kognitív fejlődés

Egész számok

Az általános iskola első éveiben a számok tanításának az a célja, hogy a gyerekek megismerjék a gondolkodási szimbólumokat és a mennyiségeket. A későbbi években a gyerekektől elvárhatjuk, hogy a számok koncepcióját absztraktabb módon is felfedezzék, és olyan számokat elemezzenek, amelyek nem mennyiségeket reprezentálnak, de az általános iskolai években a számokat a mennyiségek és a köztük lévő viszonyok kifejezésére használják.

A mennyiségek és a számok nem azonosak. *Thompson* érvelése szerint „egy személy azáltal alkot mennyiséget, hogy egy tárgy minőségét úgy értelmezi, hogy megérti annak mérhetőségét is. A mért mennyiségeknek számbeli értéke van, de ahhoz, hogy gondolkodjunk róluk, nem kell mérnünk őket, illetve tudnunk az értéküket. Gondolhatunk például a saját magasságunkra, egy másik ember magasságára, vagy arra, hogy mennyivel vagyunk magasabbak valaki másnál úgy is, hogy nem tudjuk a pontos értékeket" (*Thompson,* 1993. 165–166. o.). Számok használata nélkül is megállapíthatjuk, hogy ha magasabb vagy a barátodnál, Ricknél, és Rick magasabb, mint barátja, Paula, akkor te magasabb vagy Paulánál. Ebben biztos lehetsz akkor is, ha soha nem találkoztál Paulával. Tehát a mennyiségek közötti viszonyról gondolkodhatunk anélkül is, hogy azokat konkrét számokban fejeznénk ki. De ha számokban is ki tudjuk fejezni őket, akkor többet tudunk: ha tudod azt, hogy 4 centivel vagy magasabb Ricknél, és Rick 2 centivel magasabb Paulánál, akkor tudod, hogy te és Paula magassága között 6 cm különbség van.

Az általános iskola első éveiben a gyerekek megismerik a számokat mint a gondolkodás és a mennyiségekről való beszéd eszközeit. A számokra mint megjelenítő eszközökre helyezett hangsúly a számrendszerek mint gondolkodási eszközök jelentőségéről szól. Nem tudunk mennyiségeket rögzíteni vagy másokkal beszélgetni róluk, ha nem rendelkezünk

egy olyan számrendszerrel, amellyel a mennyiségek kifejhetőek. A mennyiségek kifejezésére szolgáló rendszer segítségével képesek vagyunk különbséget tenni, amire a rendszer nélkül nem lennénk képesek. Például, nem tudunk puszta ránézésre különbséget tenni 15 és 17 gomb között, de nincs problémánk a különbségtétellel, ha megszámoljuk őket. Vagy lehet például, hogy nem tudjuk megállapítani, hogy egy szekrény, amit az üzletben kinéztük, befér-e egy adott helyre a lakásunkba, de tudni fogjuk, ha lemérjük a szekrényt és a helyet is, ahová be akarjuk tenni. A mennyiségeket kifejező rendszerek segítségével képesek vagyunk olyan különbségtételre, amire ránézésre nem lennénk képesek, valamint térben és időben összehasonlításokat tehetünk a mennyiségek között. Képessé teszik és strukturálják gondolkodásunkat: a mérésnél számokban gondolkodunk.

Így tehát két fontos dolog van, amit a gyerekeknek el kell sajátítaniuk, hogy megértsék az egész számokat. Először, fel kell ismerniük, hogy a számokról és a mennyiségekről meglévő ismereteiket össze kell kapcsolni. Másodszor, meg kell érteniük, hogyan működik a számrendszer.

Piaget, és utána még sok más kutató is számos olyan fogalmat vizsgált meg, amelyekkel a gyerekeknek rendelkezniük kell ahhoz, hogy a mennyiségeket össze tudják kapcsolni és számokban kifejezni. A gyerekeknek tudniuk kell például, hogy:

(1) ha két mennyiség ekvivalens, ugyanazzal a számmal kell kifejezni őket;
(2) ha két mennyiség azonos számmal van leírva, akkor azok ekvivalensek;
(3) ha egy adott halmazhoz néhány elemet hozzáadunk, az a szám, amely a halmazt reprezentálja, megváltozik és nagyobb számosságú lesz;
(4) ha egy halmazból elveszünk néhány elemet, a számosságának meg kell változnia, és kisebbnek kell lennie;
(5) ha egy halmazhoz ugyanolyan számú elemet teszünk hozzá, és veszünk el belőle, a mennyisége és az elemek száma nem változik (vagyis érteniük kell az összeadás és kivonás közötti fordított viszonyt).

A körülbelül négy-öt évesnél a fiatalabb gyerekek még nem értik a számok és a mennyiségek közötti viszonyt (lásd *Ginsburg, Klein* és *Starkey,* 1998, az első négy pont tekintetében; lásd *Nunes, Bryant, Hallett, Bell* és *Evans,* 2009, az utolsó pont tekintetében). Egyes kutatások szerint a kicsi

gyerekek, sőt még a csecsemők is belátják, hogy ha az egy elemből álló halmazhoz még egy elemet hozzáadunk, akkor két elemünk lesz, de nincs bizonyíték arra, hogy a nagyon picik tudják, hogy kapcsolat van a mennyiségek és a számmal kifejezett szimbólumok között. A kicsikkel végzett minden vizsgálat érzékelésen alapul, ezért semmit nem mond nekünk arról, hogy az 1 számmal reprezentált halmaz többé már nem írható le 1-gyel, ha egy újabb elemet hozzáadunk. Az érzékelésen alapuló ítéletek és a szimbólumok használata közötti különbség a lényege a matematikatanulás és gondolkodás megértésének.

A mennyiségek és a számok közötti ezen öt összefüggés belátása szükséges (de ahogy a továbbiakban kifejtésre kerül, nem elegendő) feltétele az egész számok megértésének, de az öt kapcsolat belátása nem azonos nehézségi fokú. Az első négy sokkal egyszerűbb, mint az utolsó, amit szokás úgy megfogalmazni, hogy az összeadás és kivonás között inverz kapcsolat van.

Az összeadás és kivonás közötti összefüggés megértésének nehézsége abból adódik, hogy két műveletet, az összeadást és a kivonást kell egymással összehangolni és megérteni azt, hogy ez a koordináció hogyan érinti a számokat; ez nem következik abból az információ mennyiségből, amit a gyermeknek figyelembe kell vennie ahhoz, hogy a kérdésre válaszolni tudjon. *Bryant* (2007) az állítást egy vizsgálattal bizonyította, amelyben gyerekeket arra kértek, hogy halmazokkal kapcsolatban azonos mennyiségű információt vegyenek tekintetbe; egyes feladatok tartalmazták az összeadás és kivonás közötti fordított kapcsolatot, míg mások nem. Az inverz feladatoknál azonos számú tételt adtak hozzá és vontak ki egy halmazból. Az inverz kapcsolatot nem tartalmazó feladatoknál azonos számú tételt adtak hozzá egy halmazhoz és vontak ki egy vele ekvivalens halmazból. Néhány gyerek képes volt felismerni, hogy az eredetileg ekvivalens halmazok megváltoztak, miután egyikhez néhány tételt adtak hozzá, míg a másikból elvettek, de mégis sikertelennek bizonyultak az inverz kapcsolattal, amely ugyanazon a halmazon végzett műveleteket igényelt.

Ha tényleg fontos a mennyiségek és számszerű kifejezésük közötti összefüggés megértése, akkor a gyereknek e viszonyok felismerésére való képessége és a matematikatanulás között is összefüggésnek kell lennie. A matematikatanulás terén előnnyel indulnak azok a gyerekek, akik már az iskolába lépéskor tudják, hogy a mennyiségek és a számok milyen

viszonyban vannak egymással, szemben azokkal, akik még nem jutottak el erre a felismerésre. Két különböző kutatócsoport által (*Nunes, Bryant, Evans, Bell, Gardner, Gardner* és *Carraher,* 2007; *Stern,* 2005) végzett két vizsgálat kimutatta, hogy a gyerekek körében az összeadás és a kivonás közötti fordított összefüggés megértése előre vetíti, hogy későbbiekben milyen matematikai eredmények elérésére képesek, még akkor is, amikor az olyan általános kognitív tényezők szerepét, mint az intelligencia és a munkamemória, kiszűrték.

A fordított összefüggés megértése idővel javul a gyerekeknél. A gyerekek először annak felismerésére képesek, hogy fordított összefüggés van az összeadás és a kivonás között, ha a feladatot mennyiségekkel is illusztrálják számukra (akár vizuálisan, akár képzeletben); később is képesnek tűnnek ennek megértésére, ha a számokról kérdezzük őket, nem hivatkozva a mennyiségekre. Ha azt kérdezzük, mennyi 34 meg 29 mínusz 29, tudják, hogy nem kell kiszámítaniuk az eredményt: tudják, hogy a válasz 34. Számolás nélkül tudhatják a választ a 34+29–28-ra is, de ez már egy bonyolultabb kérdés.

Összefoglalva, az egész számok megértéséhez a gyerekeknek fel kell ismerniük, hogy speciális összefüggés van a mennyiségek és a számok között. A gyerekek négy-öt éves kor körül megértik azt, hogy ha két halmaz egyenlő, és az egyiket megszámolják, számolás nélkül tudni fogják, hogy mennyi van a másikban. Hatéves korban már megértik az összeadás és kivonás közti inverz összefüggést, és tudják, hogy ha azonos számot adnak hozzá, és vonnak ki egy halmazból, a szám nem változik. Ennek a korai megértése jól előre jelzi a későbbi matematikai teljesítményeket.

Az előző bekezdésekben leírt felismerések a mennyiségek és számok közötti logikai kapcsolatokra vonatkoznak, de csupán ez nem elegendő az egész számok elemzéséhez. Fel kell tenni azt a kérdést is: ha a számokat a tízes számrendszerben reprezentáljuk, milyen követelményeket támaszt ez a reprezentáció a tanuló kognitív képességeivel szemben? A tízes számrendszer kétféle követelményt támaszt: a tanulónak értenie kell az összeadási és a szorzási összefüggéseket is.

Az additív relációk a rész és egész viszonyáról való gondolkodást feltételezik. Annak megértéséhez, hogy mit jelent a 25, a tanulónak tudnia kell, hogy a két rész, a 20 és az 5 együtt összesen pontosan 25-öt tesznek ki. Általánosabban fogalmazva a tanulónak ismernie kell a számok additív összetételét, ami azt jelenti, hogy minden szám előállítható két másik

szám összegeként, illetve általában több szám összegeként. A tízes számrendszernél egyébként a lényeg éppen az, hogy minden szám egyértelműen bontható fel a tíz különböző hatványainak lineáris kombinációjaként.

A szorzási relációk a tízes számrendszerben számok alakjával és a helyiérték-rendszerben elfoglalt helyével kapcsolatosak. Amikor a számokat leírjuk, az a hely, ahová a számjegyet írtuk, implicite egy szorzást jelent: ha a szám jobbról az utolsó, akkor 1-gyel van szorozva, ha a második, 10-zel, ha a harmadik, 100-zal és így tovább.

A kisgyerekeknél az összeadási és szorzási összefüggések megértése nehezen megfogható és rejtett lehet, ezért speciális feladatokra van szükségünk a gondolkodás felméréséhez. Olyan feladatokat készítettünk, amelyek fel tudják mérni az összeadási műveleteket és a szorzásban érvényesülő gondolkodási folyamatokat. Az összeadást egy „vásárlási feladattal" értékeltük. Arra kértük a gyerekeket, hogy tegyenek úgy, mintha egy boltban vásárolnának; különböző értékű pénzérméket kaptak a vásárláshoz. Ha például meg akarnak venni egy játékautót, ami 9 centbe került és van egy 5 centes érméjük és hat darab 1 centes, az 5 centest négy 1 centessel kell kiegészíteniük. Azok a gyerekek, akik nem értik az összeadási műveleteket, úgy gondolják, hogy nincs elég pénzük ahhoz, hogy megvegyék a játékot: azt mondják, hogy van öt meg hat centjük, de a pénzükből nem „jön ki" a 9 cent. A hatéves korú gyermekek kétharmada meg tudja oldani a feladatot. Ez a feladat nagyon jól megjósolja az általános iskolai tanulók későbbi várható matematika teljesítményét (*Nunes* és mtsai., 2007; *Nunes, Bryant, Barros* és *Sylva,* 2011).

A kisgyerekeknek a szorzási összefüggések megértésére való képességét oly módon mértük fel, hogy megkértük őket szorzási és osztási feladatok tárgyak segítségével való megoldására. Mutattunk például nekik egy négy házból álló sort és arra kértük őket, képzeljék el, hogy mindegyik házban három nyuszi lakik. Aztán megkérdeztük tőlük, hogy hány nyúl lakik a házakban. Azok a gyerekek, akik már rendelkeztek bizonyos ismeretekkel a szorzási összefüggésekre vonatkozóan, egyenként háromszor rámutattak és házakra és közben „számolták a nyulakat". Az, hogy a kisgyerekek mennyire képesek az ilyen típusú feladatok megoldására, jól előrejelzi a későbbi matematikai teljesítményüket (*Nunes* és mtsai., 2007; *Nunes, Bryant, Barro*s és *Sylva,* 2011).

Összefoglalva, a gyerekeknek kétféle ismeretet kell elsajátítaniuk ahhoz, hogy megértsék az egész számokat. Fel kell fogniuk a mennyiség és

a számok közötti kapcsolatot, és meg kell érteniük az egész számok megjelenítésére használt számrendszer, a tízes számrendszer elveit, és általában a számrendszerek elveit, hiszen nemcsak tízes számrendszer van. Az említett óra példája a 60-as számrendszerre utal, a számítógépek a kettes számrendszert használják. A kutatók rámutattak arra, hogy azok a gyerekek, akik az általános iskola elején megszerzik ezt a tudást, később magasabb szintű matematikai teljesítményre képesek 8, 11 és 14 éves korukban (*Nunes, Bryant, Barros* és *Sylva,* 2011). Ezért a matematikai tudás korai felmérésének e képességek értékelésére kell irányulnia, hogy segítsék a tanárokat annak eldöntésében, mit tanítsanak a gyerekeknek.

Racionális számok

A racionális (nem egész) számok ahhoz szükségesek, hogy ki tudjuk fejezni az egy egységnél kisebb mennyiségeket. Ezek a mennyiségek mérési és osztási (hányados) helyzetekben jelennek meg. Méréskor, ha például a cukrot csészével mérjük és egy csészénél kevesebb mennyiségünk van, mondhatjuk azt, hogy egyharmad csésze – vagy, számmal kifejezve, 1/3. Hányadosok esetén, ha pl. egy csokoládét három gyerek között osztunk el; minden gyerek annyit kap, amennyi az 1-nek 3-mal való elosztásakor eredményként adódik, vagyis 1/3-ot. Ezekben az esetekben az a közös, hogy ahhoz, hogy hányadokról tudjunk beszélni, egyenlő részekre való osztásnak kell bekövetkeznie. Tehát a törtek számok, amelyek, szemben az egész számokkal, osztás, nem pedig megszámolás eredményei.

Az osztásban három fogalom szerepel:

(1) az osztandó, ami az elosztandó mennyiséget jelenti,

(2) az osztó, azon részek száma, amelyekre a mennyiséget osztani kell,

(3) a hányados, ami az osztás eredménye és a tört által kifejezett érték.

Ahhoz, hogy a gyerekek megértsék a törtszámokat mint bizonyos mennyiségek kifejezésére alkalmas matematikai eszközt, meg kell érteniük a számok közötti kapcsolatot és a mennyiségeket, amit kifejeznek. A törtek sok tekintetben különböznek az egész számoktól: itt most három olyan alapvető különbséget vizsgálunk, amelyet a gyerekeknek tudniuk kell ahhoz, hogy megértsék ezeket a számokat.

(1) Egy adott törtön belüli kifejezésnek a másikhoz való viszony ad jelentést: ily módon az 1 az 1/2-ben nem ugyanazt a mennyiséget fejezi ki, mint az 1 az 1/4-ben.

(2) Ugyanaz a törtszám eltérő mennyiségeket fejezhet ki, mert a tört önmagában az egészhez való viszonyt jelenti. Ezért 8-nak az 1/2-e nem azonos 12-nek az 1/2-ével, bár ugyanazzal a számmal van kifejezve.

(3) Különböző törtszámok azonos mennyiséget is kifejezhetnek: ugyanannak a pitének az 1/2-e és a 2/4-e azonos mennyiségek; a matematika órán ezt az egyenlő törtszámok vizsgálatának hívjuk.

Úgy tűnik, hogy sok tanuló először nem érti, hogy a törtben lévő számok mennyiségek közti viszonyt fejeznek ki (*Vamvakoussi* és *Vosniadou,* 2004); eltart bizonyos ideig ennek a megértése, legalábbis az oktatás jelenlegi körülményei között. Az alábbiakban bemutatunk néhány példát a törtek megértése ezen aspektusának vizsgálatára.

A tanulók által megértendő egyik összefüggés az, hogy minél nagyobb az osztandó, annál nagyobb a hányados, ha az osztó változatlan marad. Rész-egész helyzetekben az osztandó az egész, ami nem teljesen világos a törtszámmal történő kifejezéseknél; amikor azt mondjuk, hogy 1/3 csésze, a csészében levő mennyiséget osztjuk el. Könnyen megérthető, hogy egy kis csésze 1/3-a és egy nagy csésze 1/3-a nem azonos mennyiségek. A tanulók számára azonban nem könnyű annak megértése, hogy az 1/3 szimbólummal kifejezett mennyiség nem lesz mindig ugyanannyi, mert a felosztandó mennyiség eltérő lehet.

Nem ismerünk olyan tanulmányt, amely foglalkozott volna azzal a kérdéssel, hogy ugyanaz a tört jelenthet-e különböző számokat, de *Hart, Brown, Kerslake, Kücherman* és *Ruddock*nak (1985) a törtek tanulók általi megértését vizsgáló nagyszabású munkája felvetett olyan kérdést, amely a törtszámok és a mennyiségek közötti összefüggés megértését firtatja. A diákoknak azt mondták, hogy Mary zsebpénzének 1/4 részét költötte el, John pedig zsebpénze 1/2 részét, majd feltették a kérdést: lehetséges-e az, hogy Mary többet költött, mint John? Ha a tanulók tudják azt, hogy az egésznek a nagysága számít, meg tudják mondani, hogy igen, lehetséges az, hogy Mary több pénzt költött. A 11-12 éves gyerekek 42%-a és a 12-13 évesek 34%-a azt válaszolta, hogy ez nem lehetséges; válaszukat azzal indokolták, hogy 1/2 mindig több, mint 1/4. Így tehát ebben az életkorban nem egyértelmű a gyerekek számára, hogy az azonos törtszám nem mindig azonos mennyiséget fejez ki.

A törtek egyelőségének – vagyis annak, hogy a különböző törtek azonos mennyiséget fejezhetnek ki – a megértése döntő fontosságú a meny-

nyiségek és a törtek összekapcsolása, valamint a törtek összeadása és kivonása szempontjából. A kutatások azt mutatják, hogy a törtek ekvivalenciájának megértése nem minden tanuló számára könnyű (*Behr, Wachsmuth, Post* és *Lesh,* 1984; *Kerslake,* 1986) és nem egyszer és mindenkorra adott: a tanulók egyes helyzetekben felismerhetik a dolgot, más helyzetekben nem. Korábban a törtek egyenlőségének megértését vizsgáltuk 8-10 éves korosztályú tanulókkal rész-egész és hányados helyzetekben, mindkettőnél rajzok segítségével (*Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans* és *Wade,* 2007). A rész-egész szituációban a feladat a következő volt: Peter és Alan egyforma csokoládét kaptak, amelyek túl nagyok voltak ahhoz, hogy egy nap alatt megegyék. Peter 8 egyenlő részre osztotta a csokoládéját és megevett belőle 4-et; Alan a csokiját 4 részre törte és 2-t evett meg belőle. A tanulóktól azt kérdeztük, hogy a fiúk vajon azonos mennyiségű csokit ettek-e. A helyes válaszok aránya ennek a feladatnak az esetében 31% volt. A hányados szituációban a feladat a következő volt: egy 4 lányból álló csoport egyenlően oszt el egy tortát, míg egy 8 fiúból álló csoport két tortát oszt el, a lányokéval azonos tortából. A tanulóknak meg kellett mondaniuk, hogy a fiúk ugyanannyi tortát ettek-e, mint a lányok. A helyes válaszok aránya ebben az esetben 73% volt. Tehát a tört mennyiségek esetében az ekvivalencia megértése különböző lépcsőkben történik: hányados helyzetekben sokkal jobb a teljesítmény.

A tanulók által e két helyzetben nyújtott teljesítmény sok tanár számára talán meglepő lehet, de fontos tudni, hogy azok a feladatok, amelyek a matematikusok számára nagyon hasonlónak tűnnek, a tanulók szemében teljesen különbözőek lehetnek (*Vergnaud,* 1979). A fejlődéslélektannal foglalkozó pszichológusok azt vizsgálják, hogy a gyerekek a különböző tárgyakat ugyanazon kategória megjelenésének tekintik-e, megtanítva őket a tárgyak nevére és megkérve őket arra, hogy tanítás nélkül nevezzék meg a második tárgyat. Ha a gyerekek az első tárgynál megtanult elnevezést általánosítják a második tárgyra, ebből arra lehet következtetni, hogy mindkettőt ugyanazon kategória egy-egy példányának tekintik.

Ezt a megközelítést a törtek elemzésével kapcsolatos két vizsgálatban is alkalmazták (*Nunes, Campos* és *Bryant,* 2011; *Mamede,* 2007). Ezekben a kísérletekben két olyan tanulói csoportot, akik az iskolában még nem tanultak törtekről, megtanították a számok törtek formájában való reprezentációjára. A tanulókat véletlenszerűen választották ki a különböző tanítási módszerekben részt vevő csoportba, majd egyik csoportot arra

tanították, hogy a tört-szimbólumot a rész-egész viszonyok kifejezésére használják, míg másikat arra, hogy a mennyiségeket hányados szituációkban reprezentálják. A kísérleti időszak végére az előteszt eredményeihez képest mindkét csoport fejlődött, el és jóval többet haladt, mint egy kontroll csoport, de ez a fejlődés ahhoz a szituációhoz kötődött, amelyben tanították őket. Azok a tanulók, akik a rész-egész viszonyokra tanulták meg alkalmazni a törteket, nem tudták őket használni hányados helyzetek leírására, és megfordítva. A gyerekek tehát nem látják át azonnal, hogy a törteket alkalmazhatják rész-egész és hányados helyzetekben is: nem általánosítják a szimbólumok használatát egyik helyzetből a másikra. Ez a megállapítás óvatosságra intheti a kutatókat a tekintetben, hogy általános következtetést vonjanak le a tanulók törtekkel kapcsolatos ismereteiről akkor, ha csak egyfajta szituációban vizsgálták a tanulók teljesítményét.

Végül, a törtek nagyság szerinti sorrendbe való állításához szükség van az osztásnál az osztó és a hányados, vagy a törtben a nevező és a hányados közötti összefüggés ismeretére: konstans számláló mellett minél nagyobb a nevező, annál kisebb mennyiségről van szó. Ha a gyerekek inkább a mennyiségekre és nem a számjegyekre koncentrálnak, akkor jobban felismerik az osztó és a hányados közötti fordított összefüggést: például a 6-7 éves gyerekek többsége érti, hogy minél több ember osztozik egy tortán (vagy bizonyos számú édességen), annál kevesebb jut egynek. Ennek megértése azonban nem vezet el ahhoz a tudáshoz, hogy a törtek hogyan tehetők nagyságrendi sorrendbe. *Hart* és munkatársai (1985) arra kérték a tanulókat, hogy rakják növekvő sorrendbe az 1/4, 1/2, 1/100 és 1/3 törteket. Ez könnyű feladat lenne, hiszen a számláló minden esetben azonos, de a 11-13 éves korú diákoknak csupán 2/3-a találta el a helyes sorrendet.

Összefoglalva, a racionális számok osztási művelet és nem pedig számlálás eredményeként létrejött mennyiségek kifejezésére szolgálnak. Ezért ahhoz, hogy a tanulók megértsék a racionális számok és a törtek által kifejezett mennyiségek közötti összefüggést, ismerniük kell az osztási műveletnél a három mennyiség közötti viszonyt. Ugyanaz a tört különböző mennyiségeket fejezhet ki, mert különböző egész számok tört része lehet. Két különböző tört szám azonos mennyiséget fejez ki, ha a számláló és a nevező közötti összefüggés megegyezik annak ellenére, hogy a két törtszám számlálója és nevezője eltérő. Azonos számlálójú törteknél minél nagyobb a nevező, annál kisebb a kifejezett mennyiség. Végül,

a tanulók számára nem egyértelmű a törtek általános alkalmazása a rész-egész és a hányados feladatokban; a hányados feladatokban megszerzett ismeretek nem vihetők át a rész-egész feladatokra, és megfordítva.

Számtani feladatok megoldása

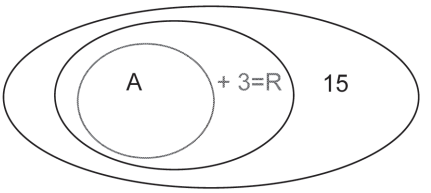
A számtani feladatok megoldásával foglalkozó kutatások sok figyelmet fordítottak a többjegyű számokkal való számolás elsajátításának. Ez az értékes vizsgálat (*Brown* és *VanLehn*, 1982; *Resnick*, 1982) sok mindent elmond nekünk arról, hogy a gyerekek alapvetően hogyan közelítik meg a számolást, még akkor is, ha hibát követnek el. Magát a vizsgálatot itt most nem tárgyaljuk, mivel a különböző fajta többjegyű számokkal való számolás nehézségei jól dokumentáltak: ismert például, hogy az átcsoportosítással (vagyis átvitellel, illetve kölcsönvétellel) való számolás nehéz; tudjuk azt is, hogy a kivonás, szorzás és osztás elvégzése gondot jelent abban az esetben, ha a számok között nulla is van, az összeadásnál azonban a nulla kevesebb problémát okoz. Így tehát nem nehéz néhány olyan számtani feladatot találni, amelyekkel jól megítélhetők a tanulók számolási készségei. Sajnos továbbra is ellentmondásos marad, hogy mi a legjobb módja a tanulók számolásra való megtanításának, mint ahogy az is, hogy mennyire van szükség a hagyományos írásbeli számítási algoritmusok megtanítására a modern technológiai társadalmakban (lásd *Nunes*, 2008). Ez utóbbi probléma ellenére jelen fejezet nem azzal foglalkozik, hogyan végezzünk számításokat, hanem azzal, hogy tudjuk, mikor melyik számítást kell elvégezni.

Az általános iskola első 6-8 évében a tanulóknak azt a matematikát tanítják, amely a mennyiségek közötti kétféle összefüggésen alapul: az összeadáson, amelyek a mennyiségek közötti rész-egész viszonyra épül, és a szorzáson, amely a különböző mennyiségek (különböző típusok) megfeleltetésére épül. A kétfajta összefüggés közötti különbséget úgy érthetjük meg a legjobban, ha veszünk egy példát. Az 1.1. ábrán két feladat látható és mindegyikben adottak a mennyiségek és az összefüggések.

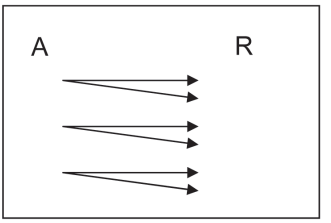
Mindkét feladat mennyiséggel, a Rob és Anne által birtokolt könyvek számával foglalkozik, valamint a két mennyiség, Rob és Anne könyvei arányával. Az 1. feladatban a mennyiségek közötti viszony rész-egész struktúrában kerül leírásra, ahogy az ábrán is látható. A rész-egész viszo-

nyok additív jellegűek. A 2. feladat a mennyiségek közötti viszonyt az egy-sok megfeleltetéseként írja le, ahogy az ábra mutatja; ezek szorzási viszonyok.

(1) Robnak és Anne-nek összesen 15 könyve van (mennyiség). Robnak 3-al több könyve van, mint Anne-nek (vagy Anne-nek 3-al kevesebb könyve van, mint Robnak) (arány). Hány könyvük van külön-külön? (mennyiség)



(2) Robnak és Anne-nek összesen 15 könyve van (mennyiség). Robnak kétszer annyi könyve van, mint Anne-nek (vagy Anne-nek fele annyi könyve van, mint Robnak) (arány). Hány könyvük van külön-külön? (mennyiség)



1.1. ábra. A mennyiségek közötti viszony sematikus ábrázolása az összeadási és szorzási műveletekben

A problémamegoldás során felhasznált matematika főként eljárásokat jelent, amelynek során nem közvetlenül a mennyiségekkel, hanem számokkal végzünk műveleteket, vagyis modellezzük a valóságos helyzeteket. *Thompsont* idézve: „A mennyiségi gondolkodás a mennyiségi struktúrák elemzését jelenti – a mennyiségek és a mennyiségi viszonyok hálózatának elemzését… A mennyiségi gondolkodásnak az egyik fő jellegzetessége, hogy a számok és a számszerű kapcsolatok másodlagos fontosságúak, és nem lépnek be az adott szituáció elsődleges elemzésébe. A legfontosabb a mennyiségek közötti viszony” (*Thompson,* 1993. 165. o.). Ha a tanulók

olyan mennyiségi viszonyokat elemeznek, amelyek jól jellemzik a szituációt, akkor az általuk felépített matematikai modell megfelelő lesz, és az elvégzett számítások helyes eredményt fognak adni. Ha azonban a mennyiségek közötti összefüggéseket a szituációt torzító módon elemzik, a felépített modell nem lesz megfelelő, és az elvégzett számítások is helytelen eredményt adnak.

Egyes helyzetekről azonnal megérthető, hogy összeadás, vagy szorzás jellegű-e, és az 5-6 éves korú kisgyerekek már képesek e feladatok megoldására, még azelőtt is, hogy megtanulnának számolni. Különböző, számolással kapcsolatos lépéseket alkalmaznak a feladatok megoldására. Ezen műveletekből megállapítható, milyen viszonyokat állapítottak meg a mennyiségek között.

Számos kutatás igazolja (pl. *Brown*, 1981; *Carpenter*, *Hiebert*, és *Moser*, 1981; *Carpenter* és *Moser*, 1982; *De Corte* és *Verschaffel*, 1987; *Kintsch* és Greeno, 1985; *Fayol*, 1992; *Ginsburg*, 1977; *Riley*, *Greeno*, és *Heller*, 1983; *Vergnaud*, 1982), hogy az óvodás korú gyerekek megfelelően cselekszenek, amikor összeadással vagy kivonással kell mennyiségi változásokkal kapcsolatos feladatokat megoldaniuk. A feladatok megoldásához összesítik és megszámolják a tételeket, vagy szétválasztják őket és megszámolják a megfelelő halmazt. Nagyon kevés óvodás korú gyerek van tisztában az összeadás és kivonás tényével; mégis, amikor két rész nagyságát közlik velük és megkérik őket, hogy nevezzék meg az egészet, 70%-uk helyes választ ad, ha kis számokról van szó, és a számolás nem okoz nekik nehézséget. Ez valószínűleg a legtöbb ember számára nem meglepő.

A legtöbb ember azonban meglepődik azon, hogy az ilyen kicsi gyerekek meglehetősen magas százalékban képesek szorzási és osztási feladatok elvégzésére, ha tárgyakkal segítjük a válaszadást. *Carpenter*, *Ansell*, *Franke*, *Fennema* és *Weisbeck* (1993) szorzási feladatokat adtak óvodás korú gyerekeknek az Egyesült Államokban, amelyekben a halmazok között a 2 : 1, 3 : 1 és 4 : 1 arányt kellett megtalálniuk (pl. minden csészében 2 darab édesség van; hány édesség van 3 csészében?). A feladatokra 71%-uk jó választ adott. *Becker* (1993) 81%-ban jó válaszokat kapott multiplikatív gondolkodási feladatoknál 5 éves korú óvodásoktól az Egyesült Államokban, amikor a 2 : 1 és 3 : 1 mennyiségi arányt kellett megadniuk.

Ha tehát a számolást tárgyakkal segítjük, a kisgyerekek könnyen különbséget tesznek az összeadási és a szorzási műveletekkel megoldható

problémák között. Azonban az összeadási és a szorzási feladatok csoportjain belül is eltérő nehézségűek lehetnek a feladatok attól függően, hogy milyen jellegű összefüggéseket tartalmaznak. *Vergnaud* (1982) szerint a számtani feladatokat nem a tanulók által elvégzendő számolás teszi nehézzé, hanem a szituációban rejlő összefüggések megértése. *Vergnaud* a feladatmegoldás ezen részét relációs kalkulusnak (*relational calculus*) nevezi, amit megkülönböztet a numerikus kalkulustól (*numerical calculus*) – vagyis magától a számolástól. A következő részekben először a relációs gondolkodás nehézségeit tárgyaljuk, először az additív gondolkodást, majd a multiplikatív gondolkodást igénylő feladatokat mutatjuk be.

Additív gondolkodási feladatok

Különböző kutatók (például *Carpenter*, *Hiebert* és *Moser*, 1981; *Riley*, *Greeno* és *Heller*, 1983; *Vergnaud*, 1982) hasonló módon javasolták osztályozni a legegyszerűbb összeadási és kivonási feladatokat. Ezen osztályozások alapja, hogy milyen típusú relációs kalkulust tartalmaznak. E megközelítés alapján három feladatcsoportot különböztetünk meg. Az első csoportba, az összegzési csoportba olyan mennyiségekkel kapcsolatos feladatok tartoznak, ahol a mennyiségeket egyesítik (illetve elkülönítik), de közben nem változtatják meg (például Paulnak 3 kék golyója és 6 piros golyója van; hány golyója van összesen?). A második csoportba a változási feladatok tartoznak, amelyek az eredeti állapothoz képest a végső állapotig átalakuláson mennek keresztül (például Paulnak 6 golyója van; egy játék során 4 golyót elvesztett; hány golyója van most?). A harmadik csoportba tartozó összehasonlító feladatok viszonyításokat tartalmaznak (pl. Marynek 6 golyója van; Paulnak 9 golyója van; mennyivel van több golyója Paulnak, mint Marynek?). A „mennyivel van több golyója Paulnak, mint Marynek” kérdés inkább a viszonyításra, és nem a mennyiségre vonatkozik. A kérdés feltehető úgy is, hogy „mennyivel van kevesebb golyója Marynek, mint Paulnak?” A viszonyításoknak van inverze (fordítottja, a „mennyivel több” fordítottja a „mennyivel kevesebb?”); a mennyiségeknek nincs.

Ezekkel a különböző típusú feladatokkal végzett vizsgálatok azt mutatták, hogy a legkönnyebbek az összegzési és a változási feladatok, amelyeknél ismert a kiinduló helyzet. Az ilyen típusú feladatokban a 6 éves kor körüli gyerekek a maximumhoz közeli teljesítményt nyújtanak.

Ugyanakkor még a legegyszerűbb összehasonlításos feladatok is nehéznek bizonyultak sok 8 éves korú gyerek számára, míg a legnehezebb feladatok, ahol az összehasonlítás fordítottjára kell gondolni, még a 10-11 éves korosztály számára is kihívást jelentenek. Például *Verschaffel* (1994) kísérlete a belga diákok egy kisebb mintáján azt mutatta, hogy a következő feladatban: „Charles-nak 34 diója van. Charles-nak 15 dióval kevesebb diója van, mint Anthonynak. Hány diója van Anthonynak?", a tanulók kb. 30%-a kivonta a 15-öt a 34-ből és helytelenül válaszolt. *Lewis* és *Mayer* (1987) arról számolt be, hogy az ilyen jellegű hiba az Egyesült Államokban még a 18 éves, vagy annál is idősebb középiskolásoknál is előfordul, bár kisebb mértékben (kb. 16%-ban).

Az összegzési feladatok mindig mennyiségekre vonatkoznak és viszonylag egyszerűek még akkor is, hogy ha feladatban nő a mennyiségek száma. Ugyanakkor a változási feladatokban átalakítások vannak; az átalakítások kombinálása nehezebb, mint a mennyiségek kombinálása, és az átalakítások elemzése nehezebb, mint a mennyiségek szétválasztása. Vegyük például az alábbi két feladatot, az első a mennyiségek összekapcsolására és átalakításra, a második két transzformáció összekapcsolására vonatkozik.

(1) Pierre-nek 6 golyója volt. Játszott egy játékot és elvesztett 4 golyót. Mennyi golyója maradt a játék után?

(2) Paul két golyós játékot játszott. Az első játékban 6 golyót nyert, a másodikban 4-t vesztett. A két játék alapján összességében mi történt?

Az óvoda és az iskola negyedik osztálya közötti korcsoportba tartozó francia gyerekek következetesen jobban szerepeltek az első, mint a második feladat típusban, pedig mindkét feladatnál ugyanazt a számítási műveletet (6–4) kellett elvégezni. A második iskolai évben, amikor a gyerekek 7 év körüliek, 80%-ban jó választ adtak az első feladatnál, a második feladattal kapcsolatban azonban csak kb. két évvel később, 9 éves korban értek el hasonló eredményt. Tehát az átalakítások (transzformációk) kombinálása sokkal nehezebb, mint a mennyiség és transzformáció összekapcsolása.

A mennyiségek közötti viszonyok illusztrálására három tanulmányt mutatunk be példaként, amelyekből az első kettő kvantitatív, a harmadik kvalitatív kutatási módszereket alkalmazott.

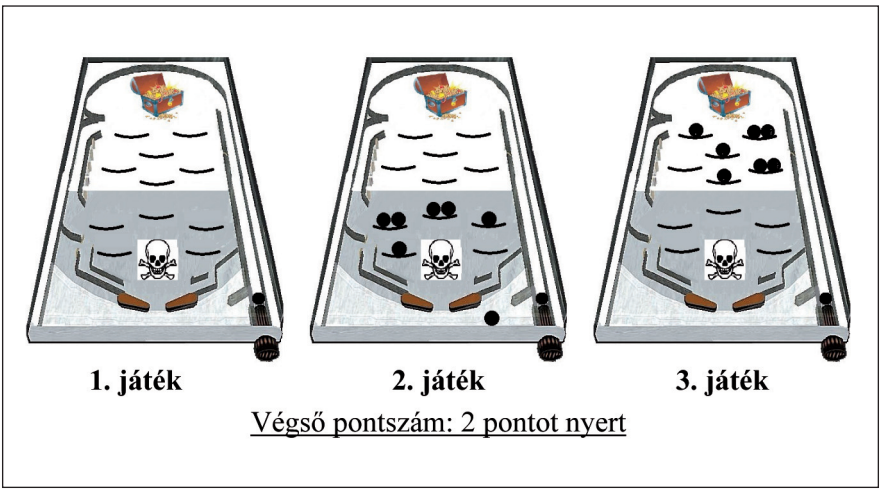
Az első példát a *Chelsea Diagnostics Mathematics Test*ből vettük (*Hart*, *Brown*, *Kerslake*, *Kuchermann* és *Ruddock*, 1985), amely három

relációs feladatot tartalmaz. Mindhárom feladat a távolsággal foglalkozik, ahol a távolság nem mint mérték, hanem mint két pont közötti viszony szerepel. A legegyszerűbb feladat az volt, hogy „John 8 mérföldet kerékpározik az otthonától az iskolába. 2 mérföld után megáll egy édességboltnál. Hogyan számolod ki, hogy Johnnak mennyit kell még mennie?" A kérdés a többszörös választás technikáját alkalmazta, és három olyan lehetséges választ tartalmazott, melyek összeadást és kivonást is magukban foglaltak: 8-2, 2-8, és 2+6. További négy választási lehetőség szorzás vagy osztás jeleket alkalmazó műveleteket tartalmazott. A vizsgálatban összesen 874 tanuló vett részt, a 10-11, 11-12 és 12-13 éves korosztályokból. A helyes válaszok aránya a 10-11 és 12-13 éves korosztályok között nem emelkedett, a válaszok kb. 68%-a volt jó. A másik két feladatnál, amelyek hasonló típusúak voltak, hasonló teljesítményt tapasztaltak, kb. 70% arányt képviseltek a helyes válaszok. (Az egyik feladatnál, amelynek két jó megoldása volt, valamivel nagyobb volt a jó válaszok aránya, elérte a 78%-ot a 11-12 évesek körében.)

A második feladatnál pozitív és negatív számokat és viszonyukat kellett alkalmazni a feladat megoldásához. Saját munkánk (amit még ilyen részletességgel nem publikáltunk) illusztrálja ezt. Az adatokat két csoport vizsgálatából gyűjtöttük; mindkét csoportot akkor vizsgáltuk, amikor átlagosan 10 évesek 7 hónaposak voltak (N=7981) majd az első csoportnál elvégeztük ugyanezt a vizsgálatot 12 év 8 hónapos (N=2755) korban is.

A feladatban egy olyan flipper játék szerepelt, amelyben a játékos pontszáma attól függött, hogy hány golyót tudott elhelyezni a tábla különböző részein (lásd *1.2. ábra*). A kincses zónába (az ábra felső része) bevitt minden golyóért a játékosok egy pontot kaptak; a koponya részbe lőtt golyók egy-egy pont veszteséget jelentettek; végül nem járt pont legaljára (lásd a 2. játékot, ahol egy ilyen golyó is van) került golyókért. Az egyes játékokban szerzett pontok kiszámítása viszonylag egyszerű, ha minden pont értéke pozitív: a tanulók kb. 90%-a helyesen adta meg a választ a 3. játék esetében. A jó válaszok aránya azonban 48% ill. 66%-ra csökkent a 10-11 és 12-13 éves korosztályokban, amikor a játékos pontokat veszített. Sokkal nehezebb feladat azonban a végeredménynek a két játékról szerzett információval való egyesítése annak érdekében, hogy megkapjuk a játékos első játékban szerzett pontszámát: a 10-11 korosztályú tanulók mindössze 29%-a, míg a 12-13 évesek 46%-a volt sikeres ennek megoldásában. Mivel a feladatokban szereplő számok kicsik, a szá-

mítással nem lehet magyarázni a feladat nehézségét: a nehézséget a relációs kalkulussal kell összekapcsolni. A flipper játékban a pozitív és negatív számokat össze kell kapcsolni, és a két játék pontjainak és a végső pontszámnak az arányából lehet kikövetkeztetni, hogy mennyi lehetett az első játék pontszáma.



1.2. ábra. Példa egy flipper játékkal kapcsolatos feladatra

Az előjeles (pozitív és negatív) számokkal végzett néhány korábbi vizsgálat azt mutatja, hogy ha minden számnak azonos az előjele (vagyis mindegyik pozitív vagy negatív), a tanulók természetes számokként kezelik őket és azt az előjelet teszik melléjük, amivel eredetileg rendelkeztek. A negatív és pozitív előjelű információk összekapcsolásához azonban jóval több viszonyításra van szükség. *Marthe* (1979) például úgy találta, hogy a 14-15 éves korosztályú tanulóknak mindössze 67%-a tudta megoldani a következő feladatot „Dupont úr 684 frankkal tartozik Henry úrnak. De Henry úr is tartozik Dupont úrnak. Ha mindent figyelembe veszünk Dupont úrnak 327 frankot kell megadnia Henry úrnak. Mennyivel tartozott Henry úr Dupont úrnak?”

Végül a harmadik példát *Thompson* (1993) kvalitatív elemzéséből vettük, amely azt vizsgálta, hogy a 7 és 9 éves tanulóknak milyen nehézségekkel kell szembenézniük, az arányok és a mennyiségek megkülönböztetésénél. A tanulók érvelését olyan komplex összehasonlító problémákban

elemezte, amelyekben legalább három mennyiség és három viszonylat szerepelt. Célja annak vizsgálata volt, hogy a gyerekek hogyan értelmezik a komplex relációs feladatokat, és hogyan változik a gondolkodásuk, ha több azonos problémával találkoznak. A feladatok szemléltetésére itt bemutatjuk az elsőt: „Tom, Fred és Rhoda összeadták almáikat, hogy egy gyümölcs standot hozzanak létre. Frednek és Rhodának együtt 97 darabbal több almája volt, mint Tomnak. Rhodának 17 almája volt. Tomnak 25 almája volt. Hány almája volt Frednek?" (167. o.). Ebben a feladatban három mennyiség (Tom, Fred és Rhoda almája) és három viszonyítás szerepel (mennyivel több almája volt Frednek és Rhodának, mint Tomnak; mennyivel volt kevesebb almája Rhodának, mint Tomnak; e két viszonyítás összekapcsolása). Az előteszt során különböző eredményeket elért hat gyereket (hárman magasabb, hárman közepes pontszámmal) kért fel kétféle osztályból, másodikosok (kb. 7 évesek) és ötödikesek (kb. 10 évesek) köréből, hogy vitassanak meg hat feladatot, amelyet négy különböző napon mutatott be. A gyerekeket arra kérte, hogy gondolkodjanak el a feladatokon, ábrázolják őket és beszéljék meg.

Az első napon a gyerekek rögtön a számolással próbálkoztak és a viszonylatokat mennyiségként kezelték: azt a kijelentést, hogy „97-tel több almája van, mint Tomnak" úgy értelmezték, hogy „97 almája van". Ez ahhoz a következtetéshez vezetett, hogy Frednek 80 almája van, mert Rhodanak 17 almája van. A második napon – amikor a játék során nyert és elvesztett golyókról szóló feladattal dolgoztak – a kutató megtanította a gyerekeknek az előjelek használatát az összefüggések kifejezésre azzal, hogy például. „plusz 12" azt jelzi, hogy valaki 12 golyót nyert, vagy „mínusz 1", ami azt jelenti, hogy valaki egy golyót veszített. A gyerekek a kutató segítségével már tudták használni ezeket a jelöléseket, de amikor két állítást összekapcsoltak, például a mínusz 8-at és a plusz 14-et, úgy gondolták, hogy a válasz 6 golyó (egy mennyiség), nem pedig plusz hat (egy viszonyszám). Először tehát viszonyítási megállapításokat tettek mennyiségi megállapításként, nyilvánvalóan azért, mert nem tudták, hogyan jelöljék a viszonylatokat. Miután azonban megtanulták, hogyan jelöljék a relációs megállapításokat, még mindig nehézségeik voltak a pusztán viszonylatokban való gondolkodással, és akaratlanul is mennyiségi megállapításokra fordították le a műveletek eredményét. Ha azonban azt kérdezték tőlük, hogy vajon mindig igaz lesz-e, hogy ha valaki a játékban 2 golyót nyert, annak 2 golyója lesz, a gyerekek felismerték,

hogy ez nem szükségképpen igaz. Megértették, hogy az összefüggések és a mennyiségek különbözőek, de két viszonylat összekapcsolásának eredményét mennyiségként értelmezték.

Sajnos *Thompson* tanulmánya nem terjed ki azokra az eredményekre, amelyek alapján meg tudnánk ítélni az ilyen típusú feladatok nehézségi fokát a különböző korosztályok számára, de joggal feltételezhető, hogy a 13-15 éves korú gyerekek még nem tudnak olyan feladatokat megoldani, ahol sok viszonylat és mennyiség kapcsolódik össze a feladatban.

A szakirodalomból összeállítható egy rövid összefoglaló arról, hogyan haladnak a tanulók az additív gondolkodásban.

(1) A gyerekek már korán, 5-6 éves kortól kezdik használni a számlálást összeadási feladatok megoldására. Használni tudják az egyesítési és különválasztási sémákat a feladatok megoldásában, vagyis mennyiségek összeadását, mennyiségek kivonását, mennyiségek átvitelét összeadással és kivonással.

(2) Kb. két-három évet vesz igénybe, hogy ezeket a műveleteket összehangolt módon kezdjék használni, általánosabb rész-egész sémákban, amellyel már egyszerűbb összehasonlítási feladatokat is meg tudnak oldani.

(3) A feladatok megoldásában az átalakítások és viszonylatok összekapcsolása (mint pl. két távolság összekapcsolása, hogy megállapítsuk a két pont közötti távolságot) továbbra is nehézséget jelent sok tanuló számára. A CSMS tanulmány a jó válaszadási arány stagnálását mutatja 13 éves kor körül; idősebb korcsoportokat nem vizsgáltak e feladatoknál.

(4) Ugyanaz az összeadási összefüggés különbözőképpen kifejezhető a „több, mint” ill. a „kevesebb, mint” szóhasználattal. Ha a tanulóknak a viszonylati megállapítást az ellenkezőjére kell fordítaniuk a számítás elvégzése érdekében, nem biztos, hogy ez sikerül nekik.

(5) A pozitív és negatív számok összekapcsolása továbbra is nehézséget okoz egészen 14 éves korig (15 éveseket, vagy idősebbeket nem vizsgáltak). A feladatok egy részénél a jó válaszok aránya nem haladta meg az 50%-t.

Multiplikatív gondolkodási feladatok

A multiplikatív feladatokkal kapcsolatos kutatások nem jutottak egységes álláspontra a feladattípusok osztályozásában. A különböző osztályozások a különböző kritériumokon és nem a multiplikatív feladatok koncepcionális eltérésein alapulnak. Itt most nem törekszünk ezen eltérések összhangba hozására, inkább lábjegyzetekben hivatkozunk rájuk a multiplikatív gondolkodás fejlődésének ismertetése során. A továbbiakban *Vergnaud* terminológiáját használjuk, és szükség szerint másokra is hivatkozunk.

Vergnaud (1983) háromféle multiplikatív okfejtést igénylő feladatot különböztetett meg:

(1) mértékek izomorfiája típusú feladatok, amelyekben két mérték szerepel, melyeket egy fix arány kapcsol össze (*Brown,* 1981, ezeket a feladatok arány, ill. ráta feladatoknak nevezi);
(2) többszörös arányok, amelyekben több mint két mérték aránylik egymáshoz;
(3) a mérték szorzás, amelyben két mértékből egy harmadik, a kettő szorzata jön létre (*Brown*, 1981, ezeket Descartes-feladatoknak nevezi).[1]

A mértékfeladatok izomorfiája a korábban leírt egyszerű feladatokat tartalmazza, amelyeket a kisgyerekek a tételek megfeleltetésével meg tudnak oldani. Ezek az iskolában legáltalánosabban használt arány feladatok. Az ilyen feladatoknál leggyakrabban használt példa egy recept elkészítése bizonyos számú ember számára és az ehhez szükséges alapanyagok mennyisége; az elkészített muffinok száma és a liszt mennyisége; a vásárolt mennyiség és a fizetett ár. A feladatok nehézségi foka függ attól, hogy milyen anyagok állnak rendelkezésre a mértékek reprezentálásához; attól, hogy milyen arány áll fenn (2 : 1 és 3 : 1 sokkal könnyebbek, mint más arányok); attól, hogy a feladatban szerepel-e az egység értéke (pl. 3 : 1 könnyebb, mint 3 : 2); valamint a feladatban szereplő értékektől (ha az ismeretlen az azonos mérték ismert értékének a többszöröse, vagy

1 Itt inkább a *mérték* fogalmát használjuk a *mennyiség* helyett, mivel egyes mennyiségek különbözőképpen mérhetők, így a mennyiségekkel kapcsolatos feladatok különböző kategóriába kerülnek. Ha pl. egy paralelogramma területét négyzet egységekkel mérjük, a területszámítás a mértékfeladatok izomorfiájának jó példája lesz: az egy sorban levő egységek száma szorozva a sorok számával. Ha a területet lineáris egységekkel mérjük, a számítás a mértékek szorzását jelenti, mivel az egy 1 cm^2-es egység két lineáris egység szorzata lesz: 1 cm x 1 cm.

osztója, a feladat megoldható numerikus gondolkodással, vagy mennyiségen belüli kalkulációval, ami a tanulók által leggyakrabban használt megoldás). Egyes országokban (pl. Franciaország; lásd *Ricco*, 1982; *Vergnaud*, 1983) a tanulóknak olyan általános algoritmust tanítanak (pl. egységnyi érték megtalálása, hármas szabály), amely felhasználható minden arányossági feladat megoldására, de a tanulók gyakran más módszereket használnak, amikor az arányossági feladatok más struktúrájú, másfajta feladatokban merülnek fel (*Hart*, 1981; *Ricco*, 1982; *Vergnaud*, 1983). A tanulókra szabott módszereket különböző terminológiákkal illették, a különböző országok módszerei azonban meglepően hasonlóak. Tartalmazzák az egyes mértékeken belüli párhuzamos transzformációt (pl. minden mérték osztása kettővel), ami megtartja a mértékeken belüli arányt, vagy a válasz progresszív megközelítését úgy, hogy ne hagyjuk figyelmen kívül az egyes mértékek közötti megfelelést. A megoldás megközelítését jól illusztrálja *Hart* (1981) közismert hagymaleves példája, ahol a 8 főre szóló receptet 6 személyre kell átalakítani. A tanulók kiszámítják, hogy mennyi összetevő szükséges 4 embernek (vagyis a 8 főre szóló mennyiség felét), majd azt, hogy mennyi szükséges 2 ember részére, és a végén összeadják a 4 és 2 ember számára szükséges alapanyagot – így kapják meg, hogy mennyi kell 6 emberhez.

A feladatokban lévő, gondosan párosított értékek szisztematikus összehasonlítása (lásd pl. *Nunes*, *Schliemann*, és *Carraher*, 1993) azt mutatja, hogy a tanulók inkább úgy közelítik meg az arányossági feladatokat, hogy az azonos mértéken belüli viszonyokat mérlegelik, és nem a feladatban lévő két különböző mérték közötti relációt vizsgálják. Ugyanazt a hagymaleves példát véve alapul, a pintben mért vízszükséglet és a személyek számának aránya 1 : 4 volt. A tanulók a 8 főre szóló receptből ki tudták számítani ezt az arányt, majd kitalálni, hogy mennyi víz kell 6 embernek, de ilyen megoldásról *Hart* nem számolt be.[2]

Összefoglalva, amikor kisebb gyerekeknél vizsgáljuk a mértékek izomorfiája típusú feladatok megértési képességét, a feladat nehézségi foka a feladat leírásához rendelkezésre álló anyag nehézségi fokának változta-

2 *Nesher* (1988) és *Schwartz* (1988) szerint egy mennyiségnek egy másikkal való elosztása, vagy az ember víz arány kiszámításához szükséges lépés megváltoztatja a számok jelentőségét: 2 pint víz helyett 4 főnél 1 pint vízre kell gondolni. Ezen transzformáció alapján egyes feladatokat magasabb nehézségi fokúnak találták. Így a multiplikációs feladatok egy más séma alapján kerültek osztályozásra, ami itt most nem kerül tárgyalásra.

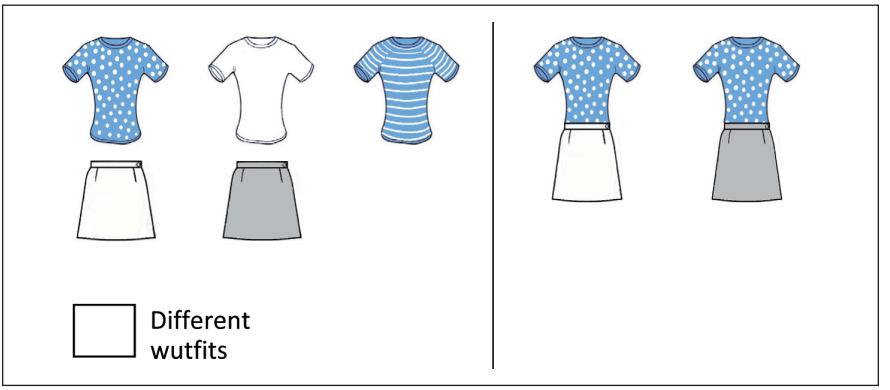
tásával alakítható; nagyobb gyerekeknél a feladat nehézségi foka olyan számok alkalmazásával módosítható, amelyek megkönnyítik a mennyiségen belüli és a mennyiségek közötti számítást.

A többszörös arányt tartalmazó feladatokban olyan szituációk szerepelnek, ahol kettőnél több mérték rendelkezik egy fix aránnyal. *Vergnaud* példaként említi egy farm tejtermelésének a megállapítását a farmon lévő tehenek számának és a napok számának a függvényében. A többszörös arányt tartalmazó feladatok nehezebbek, mint az egyszerű mértékek izomorfiája típusú feladatok, mert több információ szerepel bennük, és több számítást kell végezni. Nem világos azonban, hogy jelentenek-e újfajta koncepcionális kihívást a tanulók számára.

Az arányossági (proporcionális) gondolkodás a matematikatanítás egyik legkritikusabb pontja, mivel kialakulása a matematika számos más területén is a megértés előfeltétele. Több iskolai tárgyban szerepet játszik, mindenekelőtt a természettudomány fogalmainak és jelenségeinek megértéséhez szükséges. A hétköznapi élet különböző helyzeteiben is szükség van az arányok értelmezésére. Jelentőségében megfelelően számos vizsgálat foglalkozott a fejlődésével (*Kishta*, 1979; *Schröder* és mtsai, 2000; *Misailidou* és *Williams*, 2003; *Boyera*, *Levinea*, és *Huttenlochera*, 2008; *Jitendra* és mtsai, 2009). Egy több életkorban elvégzett, az analógiás és az induktív gondolkodással való kapcsolatát elemző elvégzett vizsgálat szerint az ötödik évfolyamon még csak a tanulók 7%-a, a hetedik évfolyamon pedig 20%-a tudott megoldani egy egyszerű arányossági feladatot (*Csapó*, 1997).

A mértékek szorzása típusú feladatok két mértékből egy harmadik létrehozását jelentik: például egy kislány adott számú trikója és szoknyája hányféleképpen állítható össze ruházattá; a különböző színes anyagok száma és az emblémák száma meghatározza, hogy hányféle zászló készíthető belőlük; egy közértben kapható különböző kenyérfélék és töltőanyagok száma meghatározza, hogy hányféle szendvics készíthető. Így tehát a mérték szorzós feladatok minőségi multiplikációt – vagyis a különböző minőségek kombinációját egy többszörös osztályozásban – és mennyiségi multiplikációt egyaránt jelentenek. Ezek a mérték szorzós feladatok sokkal nehezebbek, mint az izomorfiás feladatok (*Brown*, 1981; *Vergnaud*, 1983). E feladatok a multiplikatív gondolkodás fontos részét jelentik, ezért a tanulók multiplikatív gondolkodásának felmérése során kell értékelni őket.

A mértékszorzós feladatok tanulók általi megértése nem egyszer és mindenkorra adott dolog. A feladatok megfogalmazása egyszerűsíthető olyan felvetésekkel, amelyek arra utalnak, hogy a kombinációk hogyan működnek egy lépcsőzetes rendszerben: egy szoknyából és 3 blúzból hány különböző ruházat alakítható ki; ha veszel egy új szoknyát, még hány új kombináció hozható létre? Ha a mérték szorzós feladatokat lépcsőzetesen fogalmazzák meg, jelentősen megnő a jó válaszok száma (*Nunes* és *Bryant*, 1996). Az 1.3. ábra egy ilyen feladatra mutat be példát, ahol az első két kombinációt mutatjuk be; a tanulók könnyen rájöhetnek a többi lehetséges variációra, és megadhatják az összes lehetséges számot. Az Egyesült Királyságban vizsgált 11-12 éves gyerekek e feladatnál 81%-ban helyes választ adtak; ez jóval meghaladta a helyes válaszok 51%-os arányát olyan feladatokban, amelyek csak egy javaslatot tartalmaztak a lehetséges kombinációkra.



1.3. ábra. Példa egy mértékszorzós feladatra, ahol az első kombinációkat vizuálisan is megjelenítjük

A tanulók, azonban nem szükségképpen képesek az összes lehetséges kombinációt megjelölni a fokozatos bevezető után sem. Jelentős erőfeszítést igényel eljutni attól a lépéstől, hogy minden új szoknyához x számú új felső tartozik, addig az általános felismerésig, hogy a ruhák száma nem más, mint a szoknyák száma szorozva az új felsők számával.

Összefoglalva, a multiplikatív gondolkodás kialakulása két különböző típusú megfeleltetést igényel: egyrészt a mértékek izomorfiája típusú feladatoknál bemutatott, kvantitatív megfeleltetést, másrészt a mértékszor-

zós feladatokban bemutatott típust, ahol a többszörös osztályozó rendszer alapján egy első minőségi lépésre van szükség. A kisgyerekek sikerrel megbirkózhatnak a mértékfeladatok izomorfiájával, ha a rendelkezésre álló manipulátorokkal ábrázolni tudják a mértéket; a feladatokat számolással oldják meg (vagyis nem a szorzás eredményét számítják ki), de gondolkodásuk egyértelműen multiplikatív. A mértékszorzós feladatok már nehezebbek.

Ahogy a gyerekek a multiplikatív gondolkodás fejlődése során fokozatosan elsajátítják a relációs kalkulust, a feladatok egyre szélesebb körét tudják megoldani. Egy kihívás azonban marad még az általános iskola végén is. A tanulók általában nehezebben tudnak a mennyiségek közötti (a változók arányával mért) funkcionális relációkban, mint a mennyiségen belüli skaláris viszonylatokban gondolkodni. Ha a tanulók a feladatokat mindig skaláris módon oldják meg, az azt jelenti, hogy a szituációban rejlő viszonylatoknak csak a felét veszik figyelembe. A funkcionális viszonyok megértését segítő oktatás segíti a tanulókat a feladatmegoldási modellekről való tudatos döntéshozásban. A tanulók részben túl sokat, részben túl keveset használják az arányokban való gondolkodást (pl. *De Bock*, *Van Dooren*, *Janssens* és *Verschaffel*, 2002; *De Bock*, *Verschaffel* és *Janssens*, 1998; *Dooren*, *Bock*, *Hessels*, *Janssens* és *Verschaffel*, 2004), emellett túl sokat használják a lineáris viszonyokat akkor, amikor két változó közötti viszonyt kell grafikusan ábrázolniuk. Lehetséges, hogy ha a tanulók jobban megismerkednek a funkcionális viszonyokkal, vagyis a változók közötti viszonnyal, kevésbé fognak ilyen hibákat elkövetni.

Az értelmi képességek fejlesztése a matematikaoktatáson keresztül

Az előző részekben áttekintett kutatások szerint az általános gondolkodási folyamatok és a számokkal kapcsolatos műveletek a matematikatanításban egymással összefüggő és egymást támogató tényezők. A mennyiségekben való gondolkodás minden esetben szükséges a numerikus reprezentáció működésének megértéséhez. Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy a matematikaoktatás hogyan tud hozzájárulni a mennyiségek közötti viszonyok jobb megértéséhez, a matematikai eszközök alkalmazására irányuló és a problémamegoldó képességek fejlesztéséhez.

A matematikatanítás képességfejlesztő hatásával kapcsolatos kutatások

A mennyiségekben való gondolkodás képessége az előző részekben bemutatott példák alapján nem vele született adottság: ezek kialakulásához idő kell, fejlesztésüket pedig elősegítheti a matematikaoktatás. A matematikai gondolkodás fejlődése és a tantermi matematikatanulás között kölcsönhatás van, amennyiben az egyik fejlesztése a másik tökéletesítését eredményezi.

A különböző kutatócsoportok (*Nunes* és mtsai, 2007; *Shayer* és *Adhami*, 2007) vizsgálatai bebizonyították, hogy lehetséges a gondolkodás fejlődésének meggyorsítása, és ha az iskola első éveiben a tanórákon javítjuk a tanulók matematikai gondolkodását, az jelentős hatással van későbbi tanulásukra. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a *Shayer* és *Adhami* által indított program eredményeit, amelyben sok osztály és tanuló vett részt, és a tanárok széles körű szakmai továbbképzést kaptak. A *Shayer* és *Adhami* (2007) által végzett vizsgálatba kb. 700 tanulót és tanáraikat vonták be, akiknek mintegy a fele a kontrollcsoport, míg a másik fele a kísérleti osztályok tagjai voltak. A kutatók a CAME (*Cognitive Acceleration Through Mathematics Education* – a kognitív fejlődés felgyorsítása a matematikaoktatáson keresztül) programot ötödik és hatodik évfolyamos (9-11 éves) tanulók számára dolgozták ki az, amelyben a fő hangsúly a numerikus feladatokkal kapcsolatos gondolkodásra helyeződött. A tanárok kétnapos műhelyfoglalkozásokon vettek részt, ahol megvitatták, és a program saját céljaihoz igazítva átdolgozták a feladatokat. A tanulók térbeli gondolkodásának a program előtti és utáni felmérésére egy Piaget-féle feladat alapján került sor. A kontrollcsoportban közben a matematikaoktatás a megszokott módon folytatódott.

A *Piaget*-féle térbeli viszonyok tesztben (NFER, 1979) a gyerekeknek olyan szituációkban kellett tárgyakat rajzolniuk, amelyekből megítélhető a vízszintesről, a függőlegesről és a perspektíváról alkotott fogalmuk. Például, le kellett rajzolniuk a vízszintest egy félig teli befőttesüvegben különböző irányokból: egyenes állásban, a függőlegestől 30 fokos szögben megdöntve és az oldalára fektetve. A teszt másik feladata az volt, hogy rajzolják le, mit látnának egy olyan út közepén állva, amelyet fasor szegélyez; a rajznak a közeli és a távoli tárgyakat is láttatnia kellett. A gyerekek által adott válaszok értékelése során azt vizsgálták, hogy a helyzetet hányféle

aspektusból, hányféle viszonylatban érzékeltetik a rajzaikon. A feladatok alapján az eredmények besorolhatók *Piaget* korai konkrét műveleti szakaszába (2A szint), ha a rajzok csak egy viszonylatot tükröznek, ill. az érett konkrét műveleti szakaszba (2B), ha két viszonylatot tükröznek.

A programban szereplő feladatok sok itt felvetett kérdést vizsgáltak: a racionális számok körében például a tanulóknak össze kellett hasonlítaniuk, hogy két csoport résztvevőinek mennyi csokoládé jutott; az egyik csoportban egy csokoládét osztott el három gyerek, míg a másikban két csokoládén osztozott hat gyerek. Ebben az összefüggésben vizsgálható volt a törtek ekvivalenciája, ami segítette a tanulókat a mennyiségek egyenértékűségének megértésében ott, ahol azonos mennyiségek kifejezésre más törteket használnak.

Shayer és *Adhami* (2007) jelentős különbséget figyelt meg a kontroll és a kísérleti osztályok tanulói között, miszerint a kísérleti osztályok tanulóinak teljesítménye a *Piaget* feladatban, és a hivatalos állami standardokra épült mérésekben – ezáltal a kutatástól teljesen független értékelésben – is felülmúlta a kontrollcsoportét.

Összefoglalva, ha a tanulók gondolkodásával szemben támasztott követelmények tekintetében a jól megválasztott matematika feladatokat úgy prezentálják, hogy azok a tanulók számára lehetővé teszik a matematikai összefüggések, valamint a mennyiségek és szimbólumok megvitatását, akkor azok hozzájárulnak a matematikatanuláshoz és a kognitív fejlődéshez egyaránt.

Numerikus képességek, additív és multiplikatív gondolkodás

A fejezet korábbi részei azokkal a matematikában kialakítandó különböző gondolkodási képességekkel foglalkoztak, amelyek a számokhoz és a velük végezhető alapvető műveletekhez kapcsolódtak. Ebben a részben összegezzük fejlődésük folyamatainak leírását és fejlesztésük feladatait.

Egész számok

Az óvodában a gyermekek számára biztosítani kell a lehetőséget, hogy megismerjék a mennyiségek és a számok közötti viszonyt. Az itt felsorolt jellemzők nem teljes körűek, de minden gyereknek meg kell tudni érteni, hogy:

(1) ha egy mennyiség nő, vagy csökken, az azt kifejező szám változik;
(2) ha két mennyiség egyenlő, azonos számmal fejezzük ki őket;
(3) ha egy halmazból azonos mennyiségű egyedet elveszünk, majd hozzáadunk, a halmazban lévő szám nem változik;
(4) minden szám megalkotható két másik szám összegéből;
(5) különböző értékű érmék (pl. pénzérmék) számolásakor, egy érme egynél többet számíthat, mivel az értékét kell figyelembe venni.

Azok a gyereket, akik tisztában vannak ezekkel az elvekkel, gyorsabban haladnak az iskola első két évében a matematikatanulásban, mint a többiek. Ennek megfelelően az iskolakezdés során ezeknek a felmérésére és szükség esetén a fejlesztésére kiemelt figyelmet kell fordítani.

Racionális számok

A törtek olyan szimbólumok, amelyek osztás és nem számolás eredményeként keletkezett mennyiséget fejeznek ki. Az osztás fogalmai közötti viszonyt fejezik ki. A gyerekek már az óvodában megkezdhetik a velük való ismerkedést, majd az általános iskola első éveiben a törteket szituációkban is megtanulják használni. El kell tudniuk sajátítani, hogy:

(1) ha két osztandó azonos és két osztó azonos, a hányados is azonos (pl. ha két gyerekcsoport azonos számú gyerekből áll, akik azonos mennyiségű édességen osztoznak (vagy ugyanakkora tortát kapnak), akkor az egyik csoport gyerekei ugyanannyit kapnak, mint a másik csoporté;
(2) ha az osztandó nő, a részarány is nő;
(3) ha az osztó nő, a részarány csökken.

Az osztással és törtekkel kapcsolatos további ismeretek nagyjából nyolc-, illetve kilencéves kortól sajátíthatók el:

(4) ugyanaz az osztandó különböző módon is eloszthető, a mennyiség mégis azonos marad; az, hogy a részarányt milyen módon osztjuk el, nem számít, ha az osztó és az osztandó azonos;
(5) ha az osztandó és az osztó különböző, a köztük lévő arány még maradhat ugyanaz (pl. 1 csokoládét 2 gyerek között elosztva ugyanazt az arányt kapjuk, mint 2 csokoládét 4 gyerek között elosztva);
(6) ezeket a mennyiségi meghatározásokat össze kell hangolni a törtek leírásával.

A racionális számokkal kapcsolatos ismeretek alapján a tanulók képesek a racionális számokkal mennyiségeket kifejezni, és segítségükkel

megtanulhatják, hogyan dolgozzanak a számokkal. A feladatok megoldásához azonban a tanulóknak az általános iskolában meg kell tanulniuk, hogyan gondolkodjanak a mennyiségek közötti kétfajta viszonyról, ami alapján az egyes helyzetek különféleképpen matematizálhatók: rész-egész, ami additív gondolkodást igényel, és a viszonyok megfeleltetése, ami multiplikatív gondolkodást kíván.

Additív gondolkodás

Az additív gondolkodás fejlesztése azt jelenti, hogy a gyermek egyre inkább képes a mennyiségek és az arányok, valamint a pozitív és negatív viszony megkülönböztetésére anélkül, hogy ismerné a mennyiségeket. Bár nincs olyan vizsgálat, amelyik önmagában lefedné az additív gondolkodás fejlődését, az irodalomban található anyagok alapján összefoglalható, hogyan haladnak a tanulók az additív gondolkodásban.

1. szint. A tanulók számlálással, összeadással és kivonással meg tudnak oldani olyan mennyiségi feladatokat, amelyekben növekedésről vagy csökkenésről van szó. Az összehasonlító feladatokban még nem sikeresek.

2. szint. A tanulók már képesek összehasonlító feladatok megoldására, valamint fordított műveletek alkalmazására a feladatmegoldásban. Ugyanaz az additív viszony kifejezhető úgy is, hogy „több mint”, illetve úgy is, hogy „kevesebb, mint”. Amikor a tanulóknak át kell alakítaniuk egy relációt tartalmazó állítást a másik formára annak érdekében, hogy egy számolási műveletet elvégezzenek, ez nem mindig sikerül. Ha azonban már elérték a 2. szintet, képesek egy viszonyt az ellenkezőjére fordítani a feladat megoldása érdekében.

3. szint. A gyerekek megtanulják összehasonlítani a pozitív és negatív számokat, és képesek két arányt összekapcsolni a feladat megoldásához. A mennyiségekre vonatkozó információ hiányában kettőnél több pozitív és negatív arány összekapcsolása 14 éves kor alatt nehézségbe ütközik (a 15 évesekre, vagy idősebbekre vonatkozóan nincs adatunk). A jó válaszok aránya egyes feladatok esetében nem haladja meg az 50%-ot.

4. szint. Kiváló teljesítmény az additív összefüggések alkalmazása és ezeknek a multiplikatív összefüggésektől való megkülönböztetése terén.

Az itt felvázolt egymásra épülés megfelel a gondolkodás természetes fejlődésének. Ha a tanítás minden egyes tanuló esetében arra helyezi a hangsúlyt, ami közvetlenül a már elért szintre épül, azzal optimális fejlesztő hatást lehet elérni.

Multiplikatív gondolkodás

A multiplikatív gondolkodás a kisgyerekeknél azzal kezdődik, hogy különböző feladatok megoldása érdekében képesek a mennyiségek között az egy-sok megfelelést létrehozni, beleértve olyan feladatokat is, ahol két – összehasonlítható szituációkban azonosított változó – arányos kapcsolatban van egymással. Ehhez meg kell érteniük az arányosság fogalmát olyan helyzetekben, amikor fix arány áll fenn két változó között, egymással izomorf helyzetekben, valamint meg kell érteni két mérték közötti multiplikatív viszonyt, amelynek alapján egy harmadik hozható létre.

1. szint. A tanulók meg tudnak oldani olyan egyszerű feladatokat, amelyekben két egymáshoz hozzárendelt mérték explicite úgy van leírva, hogy egymásnak megfeleltethetőek, és segédeszközök felhasználásával létre tudják hozni a megfeleltetést. Bonyolultabb esetekben azonban, amikor maguknak kell a megfeleltetésről gondolkodniuk, rájönnek, hogy kapcsolat van a két változó között, vagyis az egyik változó változása a másik változását eredményezi, de azt már nem tudják megmondani, hogyan lehet szisztematikusan megfeleltetni egymásnak a változókat.

2. szint. A tanulók ezen a szinten felismerik, hogy a két változó két értéke együtt változik azonos irányban, és hogy e mögött az együttes változás mögött konkrét szabály húzódik meg. Egyszerűbb esetekben és ismerős összefüggésben felismerik a kapcsolat mennyiségi természetét, de nem képesek a szabály általánosítására.

3. szint. Ezen a szinten a tanulók felismerik a kapcsolat lineáris jellegét és ismerős összefüggésekben képesek az arányokkal dolgozni.

4. szint. Ezen a szinten a tanulók képesek két változó lineáris összefüggését kezelni bármilyen környezetben és tartalommal. Képesek egyúttal megkülönböztetni a lineáris és nem-lineáris viszonyokat, bár új feladatok megoldásánál lépésről lépésre el kell végezniük az összehasonlításokat.

A matematikai gondolkodás fejlesztésének további területei

A korábban tárgyaltakon túl a matematikai gondolkodásnak számos további területe van, amelyek az iskola korai szakaszában fejlesztendőek. Ezek közül néhányat áttekintünk a következőkben, a fejlesztés részleteivel azonban nem foglalkozunk. Bár a matematikai gondolkodás különbö-

ző területei szorosan összefüggenek, a gondolkodás itt tárgyalandó kérdései nem kapcsolódnak közvetlenül a numerikus gondolkodáshoz, illetve túlmutatnak a mértékek és számok kérdésein. Továbbá, kontextusba ágyazott fejlesztésükre más iskolai tantárgyakban is van lehetőség. Például a szövegértéshez az alapvető nyelvi-logikai műveletek értelmezésének képessége szükséges. Bonyolultabb természettudományos definíciók megértéséhez értelmezni kell az összetett logikai műveleteket is. A természettudomány tanulása során ugyancsak szükség van azokra a gondolkodási képességekre, amelyek műveleti hátterét a matematikatanulás keretében lehet formalizálni. Ezek közé tartozik többek között a soralkotás, a különböző csoportosítások, a függvények, a kombinatív műveletek, a valószínűség és a statisztika.

Az itt felsorolt gondolkodási képességek többségét *Piaget* is vizsgálta. Elmélete szerint ezek kialakulása korán, már az iskoláskor előtt elkezdődik. Az általunk vizsgált életkori szakaszra a művelet előtti és a konkrét műveletek fejlődése esik, a formális szint csak idősebb korra érhető el. Ennek megfelelően a matematikában az első hat évfolyamon a fejlesztés nagyobbrészt a tapasztalati alapok megteremtésére és a szabályosságok felfedezésére irányulhat, ezt követően kerülhet sor a megfelelő matematikai formalizmus elsajátítására. A természettudomány kezdetben a tapasztalati alapokat gazdagíthatja, később a formalizált matematikai tudás alkalmazására kerülhet sor a természettudomány tanítása keretében.

A logikai műveletek és a halmazokkal végzett műveletek matematikai szempontból izomorf területek, és a kapcsolatuk a matematikatanításban is kihasználható. A logikai műveletek kialakulását klasszikus kísérleteiben *Piaget* részletesen vizsgálta (*Inhelder* és *Piaget*, 1958). A későbbi kutatások megmutatták, hogy a hétköznapi gondolkodásban nem csak az összetett állítások logikai szerkezete befolyásolja, hogy miként vélekedünk azok igazságtartalmáról, hanem a kontextus, a konkrét szituációra vonatkozó tudás is (lásd *Wason*, 1968, és a Wason-feladattal kapcsolatos további kutatások). A matematika tanulása során azonban a gondolkodás fejlesztésén, így a logikai szerkezetek megértésén és értelmezésén van a hangsúly, ezért *Piaget* kutatásainak eredményei a logikai műveletek egymásra épülése tekintetében a matematikatanítás nézőpontjából továbbra is iránymutatóak. A halmazokkal végzett műveletek, melyekhez a matematika tanításában gazdag eszközrendszer áll rendelkezésre, megalapozhatják a logikai műveletek fejlesztését is. A halmazokkal végzett konkrét

műveletek segíthetik a műveleti sémák belsővé válását, interiorizációját, és ezáltal a nyelvi-logikai műveletek fejlődését is. A nyelvi-logikai műveletek fejlesztése olyan szélesebb körű pedagógiai feladat, amelyben az iskolai matematikatanításon túl az iskoláskor előtti nevelésnek és más iskolai tantárgyaknak is szerepet kell kapnia. Más iskolai tantárgyak tanulása során elsősorban az összetett állításokat tartalmazó kijelentések szerkezetének elemzésével, a műveletek és a jelentés közötti kapcsolatok megvilágításával lehet a fejlődést elősegíteni. A logikai műveletek fejlődésének vizsgálatára különböző tesztek is rendelkezésünkre állnak (pl. *Vidákovich*, 1998).

A relációk a matematika számos területén előfordulnak. A relációkkal kapcsolatos gondolkodás néhány aspektusát *Piaget* is vizsgálta. Ezek közé tartozik a soralkotások és az osztályba sorolás műveleteinek fejlődése (*Piaget* és *Inhelder*, 1958). A sorozatok létrehozása szerepet játszik a már korábban tárgyalt arányossági gondolkodás esetében is. A soralkotáson és osztályozáson keresztül megalapozható és fejleszthető több általános gondolkodási képesség is, például az analógiás és az induktív gondolkodás is (lásd *Csapó*, 1997, 2003).

A különböző szabályosságok felismerése egyrészt fejleszti a szabályindukció képességeit, másrészt pedig megalapozza a matematikai függvény fogalmát. A függvények a matematika későbbi tanulásában meghatározó szerepet játszanak. A felsőbb évfolyamokon alkalmazott matematikai függvényfogalom többszörös absztrakció révén alakul ki, ezért is nagy jelentősége van annak, hogy a korai, tapasztalati alapok biztosan kialakuljanak. A relációkat különböző formában lehet megjeleníteni, reprezentálni, vizualizálni. A különböző reprezentációk közötti kapcsolatok megértése, a többszörös reprezentáció képességének kialakítása ugyancsak a korai matematikatanítás feladata. A különböző reprezentációk közötti transzformációk egyben sokféle lehetőséget kínálnak az analógiás gondolkodás fejlesztésére is.

Matematikai szempontból a kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika szorosan összefüggő területek. A gyermeki gondolkodásban azonban különböző fogalmak fejlődési folyamatának eredményeként az érettebb formális fejlődés szakaszában kapcsolónak össze ezek a folyamatok. A spontán, a környezetből származó stimulusok már nem elegendőek e szint eléréséhez, ebben meghatározó szerepe van a szisztematikus matematikatanításnak.

A kombinatorikai problémák két fő csoportba sorolhatóak. Az egyik csoportot a felsorolási feladatok alkotják, amikor a feltételeknek megfelelő összes konstrukciót létre kell hozni, ezekben játszik szerepet a kombinatív gondolkodás. A másik csoportba a kiszámítási feladatok tartoznak, amelyek megoldását általában csak rendszeres matematikatanulás eredményeként lehet elsajátítani. Ezzel a kérdéssel már foglalkoztunk a multiplikatív gondolkodással kapcsolatban is, és néhány kombinatív művelet fejlődését *Piaget* is részletesen vizsgálta (*Piaget*, és *Inhelder*, 1975). Számos további kutatási program foglalkozott a kombinatív gondolkodás fejlődésével és fejlesztésével, mind a matematikában, mind más tantárgyakba beágyazott fejlesztő gyakorlatokat alkalmazva (*Kishta*, 1979; *Csapó*, 1988; *Schröder*, *Bödeker*, *Edelstein* és *Teo*, 2000; *Csapó*, 2001, 2003; *Nagy*, 2004). Egy részletesebb elemzés 37 olyan kombinatív műveletet azonosított, amely a kezelendő változók és a létrehozandó konstrukciók száma alapján még kezelhető, és amelyek alapján felsorolási feladatók készíthetők. A feladatokra alapozott empirikus vizsgálat megerősítette, hogy vannak olyan tanulók, akiknél 14 éves korra kialakul a kombinatív gondolkodás teljes rendszere, melynek révén képesek az összes alapvető művelettípus kezelésére, azonban a többség esetében csak a legegyszerűbb szerkezetek alakulnak ki (*Csapó*, 1988). A korai matematikatanítás jól strukturált feladatokkal fejlesztheti a kombinatív gondolkodást, míg a felsorolási feladatok más tantárgyakba is beágyazhatók, és fejleszthetik a kombinatív gondolkodást (*Csapó*, 1992). A formalizálás előkészítése azonban kizárólag a matematikatanítás feladata, melyre azután később ráépülhet a matematikai összefüggések megtanítása.

A valószínűség fogalmának kialakulása ugyancsak korán elkezdődik (*Piaget* és *Inhelder*, 1975), azonban rendszeres tanulás hiányában a tanulók többsége csak az alapvető felismerésekig jut el. Különösen nehéznek bizonyul a korrelációk, a véletlen összefüggések megértése (*Kuhn*, *Phelps*, és *Walters*, 1985; *Bán*, 1998; *Schröder*, *Bödeker*, *Edelstein* és *Teo*, 2000). A valószínűségi gondolkodás fejlődését a korai matematikatanítás elsősorban a szisztematikus tapasztalatok biztosításával segítheti. Ebben a fejlesztésben a véletlen jelenségek bemutatásával más tantárgyak, például a biológia is szerepet kaphatnak. A formális matematikai összefüggések felé vezető lépések megtétele, a kombinatorikával és a statisztikával való kapcsolat kialakítása azonban már a rendszeres matematikatanítás feladata. A fejlődési sajátosságok miatt a kapcsolatok kiteljesítésére csak

idősebb életkorban kerülhet sor, azonban a későbbi eredményes tanulás érdekében szükség van a statisztikát előkészítő korai tapasztalatok megszerzésére is.

Egy további terület a térbeli gondolkodás, mely szintén más pszichológiai fejlődési folyamatokban gyökerezik, és csak később, a geometriatanítás keretében kapcsolódik össze a mérés fogalmával, majd a matematika más területeivel. Fejlődését *Piaget* részletesen vizsgálta, elsősorban a tér rajzokban való ábrázolásán keresztül. Eredményei szerint a korai fejlődésre a topológiai szemlélet jellemző, és később is elsősorban a vonalak találkozásaiban válnak a rajzok pontossá, míg a formák különbözőképpen torzulnak. A második stádiumban (4-7 év) folyamatosan differenciálódnak a gyermekek által lerajzolt alakzatok. A harmadik stádiumban (7-8 év) pedig a tanulók már többnyire az euklideszi geometriát követető formákat képesek rajzolni (*Piaget* és *Inhelder*, 1956). A matematikatanítás keretében különösen az iskola kezdő szakaszában van nagyobb jelentősége a térbeli gondolkodás fejlesztésének. Kezdetben nagyobb szerepet kaphat a két- és háromdimenziós alakzatok közvetlen tapasztalatszerzés révén való megismerése. Ezt követheti annak tudatosítása, hagy az alakzatoknak tulajdonságaik vannak, melyek alapján le lehet írni az alakzatok közötti hasonlóságokat és különbségeket. Később pedig sor kerülhet a tulajdonságok szabatos matematikai megnevezésére és definiálására. A térbeli gondolkodás fejlesztésére a matematikán túl a rajztanítás és a művészeti nevelés keretében van lehetőség. A térábrázolás és a térszemlélet fejlődésének felmérése sokféle mérőeszközzel lehetséges (pl. *Kárpáti* és *Gaul*, 2011; *Kárpáti* és *Pethő*, 2011).

A kognitív fejlődés felmérése a matematikában

Az eddig tárgyaltakban főként a gondolkodás fontosságát hangsúlyoztuk a számrendszer megértésében, valamint annak felismerésében, hogy a matematika hogyan használható a világ modellezésére. A másik fő gondolatsor, hogy mindazok az ismeretek, amelyeket a tanulóknak a matematikában el kell sajátítaniuk, nem alakulnak ki egy lépésben. Ezért a matematikával összefüggő kognitív fejlődés felmérését úgy kell elvégezni, hogy a relációs számításokhoz viszonyítva kisebb követelményt támasszon a számolással szemben. A számolást a saját helyén lehet és kell értékelni.

A mérések tartalma

A matematikai gondolkodás értékelésének középpontjában a későbbi matematikai teljesítményeket megalapozó gondolkodási képességeknek kell állniuk. A különböző előrejelző vizsgálatok azt mutatták, hogy a gyerekeknek a korai években nyújtott teljesítménye olyan feladatokban, amelyek felmérik a megfeleltetésről, sorba állításról, összeadásról, valamint az összeadás és kivonás közötti fordított viszonyról való tudásukat, ismereteiket előre tudja vetíteni a várható jövőbeni matematikai teljesítményeket (*Nunes* és mtsai, 2007; *van de Rijt*, *van Luit*, és *Pennings*, 1999). A későbbi matematikai teljesítményt jól jelzi a számok közötti viszonyok felismerésének képessége, amit számérzéknek hívnak (*Fuchs*, *Compton*, *Fuchs*, *Paulsen*, *Bryant*, és *Hamlet*, 2005).

A számokkal kapcsolatos korai tudás felmérhető a számok írása és olvasása, a leírt és a kimondott számok nagyságrendjének összehasonlítása, és néhány számolási művelet alapján. Tudomásunk szerint mindössze egyetlen tanulmány (*Nunes* és mtsai., 2009) van, amely összehasonlította a számokkal kapcsolatos képesség relatív jelentőségét a matematikai teljesítmény előrejelzésében. Ez az összehasonlítás kiterjedt a figyelem és a memória kognitív funkcióira és az intelligencia vizsgálatára is. A prediktorokat a tanulók 8-9 éves korában mérték fel; a későbbi matematikai teljesítmény jellemzésére független standard adatokat választottak, amelyeket az iskolában gyűjtöttek össze 11-12 és 13-14 éves korban. A matematikai gondolkodás mindkét időpontban nagyobb szerepet játszott, mint a figyelem, a memória, sőt akár a számolási készség. A matematikai gondolkodás és a számolási készség relatív jelentőségének elemzése azt mutatja, hogy ahol komoly szerepe van az időkorlátnak, ott fontosabb a matematikai gondolkodás, mint a számolási készség felmérése.

A matematikai gondolkodás felmérésének formái

A matematikai képességek értékelésének megtervezése óhatatlanul kapcsolódik a tanulók általános képességeihez az utasítások megértése és a verbális kommunikáció terén. Az olvasási képességek befolyását azonban csökkenteni lehet azzal, ha olyan értékelő feladatokat találunk ki, amelyekben rajzok segítik a gyerekeket a feladat megértésében. A rajzok ab-

ban is segítik a tanulókat, hogy a megoldás számszerű értékéhez különböző megközelítéssel jussanak el: bizonyos esetekben elemezhetik a rajzot (pl. feloszthatnak valamit két részre, hogy jobban el tudják képzelni a mennyiség felét) és még számolhatnak is, hogy megkapják a helyes választ. Amennyiben helyesen mérik fel a helyzetet, jobb esélyük van a jó mennyiségi válasz megadására, mint ha a feladatot csak írásban kapták volna meg. A Freudenthal Intézet kutatói használták először ezt a megközelítést az értékeléshez (lásd pl. *van den Heuvel-Panhuizen*, 1990), amely értékes információkat adott a tanulók relációs kalkulációs képességeiről.

Ahogy korábban is említettük, a matematikai gondolkodás fejlődéséhez időre van szükség. Ideális esetben az értékelésbe beépíthetők a gondolkodási képességekkel szembeni különböző szintű elvárások. Ezek variálhatók különböző kifejezési formák, különböző szituációk, valamint különböző értékek használatával. Az előzőekben áttekintett lehetőségek megmutatták, hogyan lehet azonos típusú fogalmak értékelésére különböző feladatváltozatokat létrehozni.

Összegzés

Ebben a fejezetben áttekinttettük a matematikai gondolkodás fejlődésének néhány alapvető területét. Azokra a pszichológiai kérdésekre fordítottunk nagyobb figyelmet, amelyek meghatározó jelentőségűek a korai értelmi fejlődés szempontjából. Olyan területeket emeltünk ki, amelyek csaknem kizárólagosan a matematikatanítás keretei között fejleszthetőek. Ezek közül is központi jelentőségű a mennyiségekkel és a számokkal kapcsolatos fogalmak kialakulása, továbbá a hozzájuk kapcsolódó gondolkodási képességek fejlődése.

Hangsúlyoztuk azokat a pszichológiai különbségeket, amelyek a gondolkodás természetes fejlődése és a matematikai ismeretek elsajátítása között van. Az iskola kezdő szakaszában kiemelt helyet kell kapnia a gondolkodás fejlesztésének; kellően fejlett matematikai gondolkodás hiányában nem lehet eredményes a matematikai ismeretek értő elsajátítása.

Négy fő területet emeltünk ki: az egész számok és a racionális számok fogalmának, továbbá az additív gondolkodás és a multiplikatív gondolkodás fejlődésének kérdéseit. Ezek azért rendkívül fontosak, mert meg-

alapozzák a későbbi sikeres tanulmányokat. Különböző kutatások bizonyították, hogy ezeknek komoly előrejelző ereje van, az ezek terén mért korai fejlettség meghatározta a későbbi eredményeket.

Utaltunk arra, hogy ezeken kívül számos más eleme van a matematikai gondolkodásnak, amelyek fejlesztése a matematikában ugyancsak fontos. Ezek fejlesztése során az előzőekben bemutatott alapelveket lehet érvényesíteni.

Kifejtettük, hogy a matematikai gondolkodás fejlődése lassú, hosszan tartó folyamat. Ugyanakkor különböző kutatások és kísérleti fejlesztő programok bizonyítják, hogy megfelelően stimuláló gyakorlatokkal a fejlődést fel lehet gyorsítani. Ezek a gyakorlatok azonban csak akkor lehetnek eredményesek, ha pontosan illeszkednek a tanulók aktuális fejlettségéhez. Ezért a matematikai gondolkodás fejlesztése során rendkívül fontos a fejlődési fázisok egymásra épülése. Egy összetett gondolkodási folyamatot csak akkor lehet kialakítani, amikor az azt alkotó komponensek, az egyszerűbb gondolkodási műveletek már kialakultak.

A gondolkodás eredményes fejlesztéséhez különösen fontos, hogy a tanár ismerje, hol tartanak a tanulói, és ennek megfelelő gyakorlatokkal segítse továbblépésüket. Ennek megfelelően a diagnosztikus értékelésnek részletesen le kell fednie a gondolkodás fejlődési folyamatát, minden területen megjelenítve annak különböző szintjeit. Különösen nagy figyelmet kell fordítani azokra az e fejezetben részletesebben is tárgyalt területekre, amelyek a kutatások szerint jelentős mértékben meghatározzák a későbbi sikereket.

Irodalom

Bán Sándor (1998): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, 221–250. Budapest.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., és Lesh, R. (1984): Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* **15**. 5. sz. 323–341.

Boyera, T. W., Levinea, S. C. és Huttenlochera, J. (2008): Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, **44**. 5. sz. 1478–1490.

Bryant, P. (2007): Children's understanding of addition and subtraction. Paper presented at the Conference Students' misconceptions and errors. Greek Education Research Center of the Ministry of Education, Athens, 1-2 November.

Brown, J. S. és VanLehn, K. (1982): Towards a generative theory of 'bugs'. In: Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Romberg T. A. (szerk.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 117–135.

Brown, M. (1981): Number operations. In: Hart, K. (szerk.): *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. NFER-Nelson, Windsor, UK. 23–47.

Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó, B. (1992): Improving operational abilities in children. In: Demetriou, A., Shayer, M. és Efklides, A. (szerk.): *Neo-Piagetian theories of cognitive development. Implications and applications for education*. Routledge and Kegan Paul, London. 144–159.

Csapó, B. (1997): Development of inductive reasoning: Cross-sectional measurements in an educational context. *International Journal of Behavioral Development,* **20**. 4. sz. 609–626.

Csapó Benő (2001): A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*. **101**. 4. sz. 511–530.

Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. és Verschaffel, L. (2002): Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics,* **50**. 311–334.

De Bock, D., Verschaffel, L. és Janssens, D. (1998): The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics,* **35**. 65–83.

Dooren, W. V., Bock, D. D., Hessels, A., Janssens, D. és Verschaffel, L. (2004): Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction,* **14.** 5. sz. 485–501.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D. és Hamlet, C. L. (2005): The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology,* **97**. 493–513.

Hart, K. (1981): Ratio and proportion. In: Hart, K. (szerk.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* John Murray, London. 88–101.

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Kuchermann, D. és Ruddock, G. (1985): *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Fractions 1*. NFER-Nelson, Windsor, UK.

Inhelder, B. és Piaget, J. (1958): *The growth of logical thinking.* Routledge and Kegan Paul. London. [Magyarul: A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.]

Jitendra, A. K., Star, J. R., Starosta, K., Leh, J. M., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C. L., és Mack, T. R. (2009): Improving seventh grade students' learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology*, **34**. 3. sz. 250–264.

Kárpáti Andrea és Gaul Emil (2011): A vizuális képességrendszer: tartalom, fejlődés, értékelés. In: Csapó Benő és Zsolnai Anikó (szerk.): *Kognitív és affektív fejlődési folyamatok diagnosztikus értékelésének lehetőségei az iskola kezdő szakaszában.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 41–82.

Kárpáti Andrea és Pethő Villő (2011): A vizuális és a zenei nevelés eredményeinek vizsgálata. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (megj. alatt).

Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson, Windsor.

Kishta, M. A. (1979): Proportional and combinatorial reasoning in two cultures. *Journal of Research in Science Teaching.* **16**. 5. sz. 439–443.

Kuhn, D., Phelps, E. és Walters, J, (1985): Correlational reasoning in an everyday context. *Journal of Applied Developmental Psychology*, **6**. 1. sz. 85–97.

Magina, S. és Hoyles, C. (1997): Children's understanding of turn and angle. In: Nunes, T. és Bryant, P. (szerk.): *Learning and teaching mathematics. An international perspective*. Psychology Press, Hove, UK. 88–114.

Misailidou, C. és Williams, J. (2003): Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior.* **22**. 335–368.

Mamede, E. P. B. d. C. (2007): *The effects of situations on children's understanding of fractions.* Unpublished PhD Thesis, Oxford Brookes University, Oxford.

Nagy József (2004): A elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, **14**. 8. sz. 3–20.

Nesher, P. (1988): Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number concepts and operations in the middle grades*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 19–40.

Nunes, T. (2008): Mathematics instruction in primary school: The first three years. In: Balayeva, J. (szerk.): *The Encyclopedia of Language and Literacy Development*. Canadian Language and Literacy Research Network, London, Ontario. http://literacyencyclopedia.ca/index.php?fa=items.show&topicId=250

Nunes, T. és Bryant, P. (1996): *Children doing mathematics.* Blackwell Publishers, Oxford.

Nunes, T. és Bryant, P. (2010): Insights form everyday knowledge for mathematics education. In: Preiss, D. D. és Sternberg, R. J. (szerk.): *Innovations in Educational Psychology*. Springer, New York. 51–78.

Nunes, T., Bryant, P., Barros, R. és Sylva, K. (2011): The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology, Article first published online: 27 APR 2011, DOI: 10.1111/j. 2044–8279.2011.02033.x*.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A. és Carraher, J. N. (2007): The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology,* **25**. 147–166.

Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D. és Evans, D. (2009): Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematics Thinking and Learning,* **11**. 61–78.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D. és Wade, J. (2007): La compréhension des fractions chez les enfants. In: Merri, M. (szerk.): *Activité humaine et conceptualization.* Presses Universitaires du Mirail, Toulouse. 255–262.

Nunes, T., Campos, T. M. M. és Bryant, P. (2011): *Introdução à Educação Matemática Os números racionais*. Cortez, São Paulo.

Nunes, T., Schliemann, A. D. és Carraher, D. W. (1993): *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press, New York.

Piaget, J. és Inhelder, B. (1974): *The child's construction of quantities*. Routledge and Kegan Paul, London.

Piaget, J. és Inhelder, B. (1975): *The origin of the idea of chance in children.* Routledge and Kegan Paul, London.

Piaget, J. és Inhelder, B. (1976): *The child's conception of space*. Routledge and Kegan Paul, London.

Resnick, L. B. (1982): Syntax and semantics in learning to subtract. In: Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Romberg, T. A. (szerk.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 136–155.

Ricco, G. (1982): Les première acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics,* **13**. 289–327.

Schröder, E., Bödeker, K., Edelstein, W. és Teo, T. (2000). *Proportional, combinatorial, and correlational reasoning. A manual including measurement procedures and descriptive analyses.* Study „Individual Development and Social Structure". Data Handbooks Part 4. Max Planck Institute for Human Development, Berlin.

Schwartz, J. (1988): Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number concepts and operations in the middle grades*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 41–52.

Shayer, M., és Adhami, M. (2007): Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational Studies in Mathematics,* **64**. 265–291.

Stern, E. (2005): *Transitions in mathematics: From intuitive quantification to symbol-based reasoning.* Paper presented at the International Society for the Study of Behavioral Development (ISSBD), Melbourne, Australia.

Vamvakoussi, X. és Vosniadou, S. (2004): Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction,* **14**. 453–467.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1990): Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests. In: Gravemeijer, K. Van den Heuvel, M. és Streefland, L. (szerk.): *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*. Utrecht, Netherlands: Research group for Mathematical Education and Educational Computer Centre, State University of Utrect. 53–78.

Van de Rijt, B. A. M., van Luit, J. E. H. és Pennings, A. H. (1999): The construction of the Utrecht Early Mathematical Competence Scales. *Educational and Psychological Measurement,* **59**. 289–309.

Vergnaud, G. (1979): The Acquisition of Arithmetical Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* **10**. 263–274.

Verschaffel, L. (1994): Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**. 2. sz. 141–165.

Vidákovich Tibor (1998): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest, 191–220.

Vigotszkij, L. Sz. (1971): *A magasabb pszichikus funkciók fejlődése*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Wason, P. C. (1968): Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology.* **20**. 271–281.