



A diagnosztikus matematika mérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések

Csíkos Csaba

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Csapó Benő

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Bevezetés

Ennek a fejezetnek az a fő funkciója, hogy kapcsolatot teremtsen az előző három elméleti fejezet és a következő részben bemutatásra kerülő részletes tartalmi leírások között. Itt foglalkozunk továbbá a tartalmi keretek műfaji sajátosságaival, és bemutatjuk azokat a megfontolásokat, amelyek az általunk alkalmazott megoldásokat indokolják.

Az első két fejezet a nemzetközi kutatások alapján vázolta fel a matematikai gondolkodás fejlesztésével és általában a matematika gondolkodásfejlesztő szerepével kapcsolatos eredményeket, elsősorban a fejlődés-
lélektani megközelítés alapján. A második fejezet a matematikatanítás külső céljai felől közelítette meg a problémát, ugyancsak a nemzetközi tudományos eredmények felhasználásával. A harmadik fejezetben már megjelentek a magyar közoktatás hagyományai, tantervi adottságai, és felsejlett az a gyakorlat is, amelyhez a diagnosztikus rendszert illeszteni kell. Ezekből már látható az egyik megoldandó feladat is: úgy kell a tudomány élvonalának eredményeit adaptálni, hogy azok mind az egyéni tanulókra, mind pedig az oktatási rendszer egészére a lehető legnagyobb fejlesztő hatást gyakorolhassák.

A diagnosztikus mérési rendszer három fő területen kerül egymással párhuzamosan kidolgozásra, minden tekintetben azonos alapelvek szerint.¹ Az olvasás, a matematika és a természettudomány azonos keretek között kezelését számos pszichológiai és pedagógiai alapelv és oktatás-szervezési adottság is indokolja. Megfelelő szintű szövegértés nélkül nem lehet sem matematikát, sem természettudományt tanulni, ugyanakkor a matematika és a természettudomány olyan szövegek olvasásának és megértésének képességeit is fejleszti, amelyekre a szépirodalmi szövegek nem kínálnak lehetőséget. A matematika és a nyelv logikája kölcsönösen erősítheti egymást. A természettudomány a legjobb gyakorlóterep a matematikában elsajátított összefüggések alkalmazására. A sokféle kapcsolatrendszer figyelembevételére és kihasználására különösen fontos az iskola kezdő szakaszában, amikor a tanulók értelmi fejlődése nagyon gyors, és rendkívül érzékeny a stimuláló hatásokra.

A három terület párhuzamos kezelésének további előnye, hogy kölcsönösen megtermékenyítik egymást, az egyik területen megjelenő ötleteket, formai megoldásokat fel lehet használni a másik területeken is. A feladatrendszerek kidolgozása, az egységes skálázás, adatelemzés és a visszajelző rendszerek kifejlesztése is szükségessé teszi a három terület párhuzamos kezelését és bizonyos közös alapelvek követését. A párhuzamok azonban kompromisszumokat is igényelnek: ugyanazokat az alapelveket csak bizonyos mértékig lehet a három területen azonos módon követni. Az egységesség érdekében megőrizzük és párhuzamosan alkalmazzuk a háromdimenziós megközelítést, ugyanakkor az egyes dimenziók értelmezésében figyelembe vesszük a területek sajátosságait.

A párhuzamos munka további előnye lehet a komplementer hatás. A három területet összesen kilenc elméleti fejezet alapozza meg. A fejezetek szerkezetének felvázolása során már nem törekedtünk a szigorú párhuzamra. Így lehetővé vált, hogy az egyik terület az egyik, míg a másik valami más kérdést bontson ki részletesebben. Például az olvasás kötet első fejezetében hangsúlyosabb a fejlődés-lélektani, idegtudományi megközelítés, amelynek fontos üzenetei vannak a matematika és részben a természettudomány számára is. Néhány gondolkodási képesség leírása részletesebb a természettudomány kötet első fejezetében, ugyanakkor ezek a képességek fejlesztendők a matematikában is. A kötetek második fejeze-

¹ Ez a fejezet is tartalmaz olyan részeket, amelyek mind a három kötet azonos funkciójú fejezetében megjelennek.

tei a tudás alkalmazási kérdéseivel foglalkoznak, bármelyik fejezet általános érvényű megállapításai a másik két mérési területen is érvényesíthetők. A harmadik fejezet mindegyik területen gyakorlati, tantervi kérdéseket is tárgyal, közös bennük a kötődés a magyar közoktatás történeti hagyományaihoz, mai gyakorlatához. Ugyanakkor az oktatás tartalmának kiválasztása és elrendezése terén is felmerül a progresszív nemzetközi tendenciák követésének, a másutt elért eredmények alkalmazásának igénye.

Ezeknek az elveknek megfelelően a kilenc elméleti fejezetet együttesen tekintjük a diagnosztikus mérési rendszer elméleti alapjának. Az egyes elméleti fejezetekben feldolgozott háttértudásból mindegyik területen meríthetünk, anélkül, hogy a közös kérdéseket minden párhuzamos fejezetben részletesen kibontottuk volna.

E fejezet első részében áttekintjük a tartalmi keretek kidolgozásának fő szempontjait. Elsőként az oktatás céljainak és a mérések tartalmának leírására használt eszközrendszereket tekintjük át, és bemutatjuk a diagnosztikus mérések tartalmának részletes leírására általunk használt megoldást. A további részekben kifejtyük, miképpen alkalmazzuk ezeket az elveket a matematika tartalmi kereteinek kidolgozásában.

Taxonómiák, standardok és tartalmi keretek

A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása során különböző forrásokra támaszkodhatunk. Munkánk során azt a fejlődési irányt követtük, amely az oktatás céljainak és a mérések tartalmainak pontosan meghatározására törekszik. Elsőként a tartalmak leírására használt rendszereket tekintjük át, és ezekhez viszonyítva jellemezzük az általunk alkalmazott módszert.

Taxonómiai rendszerek

A tantervi célok precíz leírására való törekvés az 1950-es évekig vezethető vissza. Többféle folyamat együttes hatásaként ekkor jelentek meg *Bloom* és munkatársainak taxonómiai rendszerei, amelyek azután erőteljesen befolyásolták az azt követő évtizedek pedagógiai törekvéseit. A taxonómiák kidolgozásának egyik kiváltó oka a tantervi célok megfogalmazá-

sának homályosságával való általános elégedetlenség volt, egy másik pedig az oktatásban abban az időben megerősödő kibernetikai szemléletmód. Megjelent a szabályozhatóság igénye, amelyhez szükség volt a visszacsatolásra, a visszacsatolás pedig feltételezi a célként kitűzött és az aktuálisan elért értékek mérését. A cél és az aktuális állapot összehasonlítása alapján lehet megállapítani a hiányosságokat, és ezekre alapozva lehet megtervezni a beavatkozást. Az ugyanebben az időben más folyamatok hatására megerősödő pedagógiai értékelés, a tesztek elterjedése szintén a mérés tárgyának pontosabb meghatározását tette szükségessé.

A taxonómia lényegében egy szerkezeti váz, amely megmutatja, hogy hogyan lehet bizonyos dolgokat – esetünkben az elsajátítandó tudást – elrendezni, rendszerbe foglalni, osztályozni. Olyan, mint egy fiókos szekrény, amelynek fiókjain ott vannak a címkék, amelyek megmutatják, minek kell abba kerülnie; vagy, mint egy táblázat, amelynek a fejléce ki van töltve, és így ki van jelölve, mi lehet az egyes oszlopokban és sorokban. A korábbi általános leírások után egy ilyen formalizált rendszer alapján történő tervezés valóban nagy előrelépést jelentett, és a konkrét tantárgyi célok kidolgozóit a tanítás eredményeként elvárt viselkedés alapos végiggondolására készítette.

A legnagyobb hatása az elsőként megjelenő kognitív terület taxonómiai rendszerének volt (*Bloom* és mtsai, 1956), amely új távlatokat nyitott a tanterv- és értékelélmélet számára. A taxonómiai rendszer konkrét, megfigyelhető kategóriákban írta le a tanulóktól elvárt viselkedésformákat. A legnagyobb újdonságot a hat egymásra épülő, és minden tudásterületen egységesen alkalmazható keretrendszer jelentette. Ezen túl a korábbi hasonló törekvéseket nagymértékben meghaladó részletesség, pontosság és konkrétság jelentett számottevő előrelépést. További előny volt, hogy ugyanazt a részletes leírást lehetett használni a tanulási folyamatok megtervezésére és a mérőeszközök elkészítésére. Innen ered a *cél- és értékeléstudonómiák* elnevezés, amely utal a kettős funkcióra.

A *Bloom*-féle taxonómiák elsőként az Egyesült Államokban váltottak ki jelentősebb közvetlen hatást, majd ez a rendszer alapozta meg az első nemzetközi IEA felméréseket is. Az empirikus vizsgálatok nem mindenben igazolták a tudásnak a taxonómiai rendszerben feltételezett hierarchiáját. A *Bloom*-taxonómiát meghatározó viselkedés-lélektani megközelítés is háttérbe szorult az oktatási folyamatok pszichológiai értelmezésében, átadva a helyét más paradigmáknak, mindenekelőtt a kognitív

pszichológiának. Így az eredeti kognitív taxonómiák alkalmazására is egyre ritkábban került sor. Az affektív és a pszichomotoros terület hasonló taxonómiái csak később készültek el, de – bár sok területen alkalmazták azokat – nem váltottak ki a kognitívhoz hasonlóan széles körű hatást.

A taxonómiák mint rendszerezési elvek „üres rendszerek”, nem foglaloznak a konkrét tartalommal. A taxonómiákat bemutató kézikönyvekben a tartalom csak az illusztráció szerepét tölti be. Ha például Bloom taxonómiájának hat szintje a tudás (*knowledge*), a megértés (*comprehension*), az alkalmazás (*application*), az analízis (*analysis*), a szintézis (*synthesis*) és az értékelés (*evaluation*) a kémia egy konkrét területén elérendő célok leírásában kerül alkalmazásra, akkor azt kell pontosan megadni, mit kell tudni kémiából, mit kell megérteni, mit alkalmazni stb.

Az eredeti taxonómiák hatására vagy azok átdolgozásaként, korszerűsítéseként a későbbiekben is születtek és folyamatosan születnek újabb rendszerek és a célok leírását segítő hasonló szellemű kézikönyvek (*Anderson és Krathwohl, 2001; Marzano és Kendall, 2007*). Ezek közös jellemzője, hogy folytatják a Bloom által meghonosított hagyományt, továbbra is központi kérdésként kezelve a célok operacionalizálását, a tudás konkrétan felmérhető alapelemekre való lebontását. A taxonómiai rendszerek elkészítése során kialakult módszerek később a standardok kidolgozásának is hasznos módszertani forrásai lettek.

Standardok az oktatásban

A standardok kidolgozása az 1990-es években kapott lendületet. Elsősorban az angolszász országokban volt látványos ez a folyamat, amelyek közoktatásában korábban nem voltak a tanítás tartalmát szabályozó normatív dokumentumok. Volt például olyan ország, ahol – kis túlzással – minden iskolában azt tanítottak, amit helyi szinten eldöntöttek. Ilyen feltételek mellett az oktatáspolitikai lehetőségei beszűkültek, az iskola-rendszer teljesítményének javítására kevés lehetőség adódott. Ezért indultak el azok a folyamatok, amelyek az iskolai oktatás céljainak valamilyen szinten (tartományi, nemzeti) központi meghatározásához vezettek.

Az oktatási standardok lényegében az egységes oktatási követelményeket jelentik. Ellentétben a taxonómiákkal – mint rendszerekkel –, a standardok mindig konkrét tartalommal foglalkoznak. Általában külön szak-

mai csoportok készítik, így a különböző diszciplínák sajátosságaitól függően sokféle formai megoldást alkalmazhatnak.

A standardokat általában a szakterület specialistáiból szerveződő munkacsoportok készítik el a legfrissebb elméleti koncepciók és tudományos eredmények felhasználásával. (Az Egyesült Államokban például a matematikatanárok szakmai szervezete – *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM – dolgozta ki a közoktatás 12 évfolyamát átfogó standardokat.) A standardok általában leíró jellegűek, és azt fejezik ki, milyen tudás várható el a tanulóktól az adott tárgyból egy adott évfolyam befejeztével. Ebből következően a *standardok* fogalmának a magyar tantervi szakirodalom *követelmények* kifejezése felel meg legjobban.

A standardok kidolgozásával párhuzamosan elterjedt azok alkalmazása, a taxonómiai rendszerekhez hasonlóan mind az értékelésben, mind az oktatás folyamatában. Kézikönyvek sokasága jelent meg, amelyek részletesen bemutatják a standardok kidolgozásának és alkalmazásának módszereit. A hangsúlyok azonban mások, mint amelyek a taxonómiai rendszerek esetében érvényesültek. A standardok közvetlenül inkább az oktatásban hatnak (lásd pl. *Ainsworth*, 2003; *Marzano* és *Haystead*, 2008), és csak másodlagos az ezekhez igazodó értékelés (pl. *O'Neill* és *Stansbury*, 2000; *Ainsworth* és *Viegut*, 2006). A standard alapú oktatás (*standard-based education*) lényegében azt jelenti, hogy *vannak* részletesen kidolgozott, egységes követelmények, melyek elérése az adott életkorú tanulóktól elvárható.

A magyar és az egyéb erősen központosított oktatási rendszerekben tapasztalatot szerzett szakemberek számára a standardok és a standard alapú oktatás nem mindenben jelent újdonságot. Magyarországon az 1990-es évek előtt egy központi tanterv írta elő a tanítás tartalmait, amelyre egy tankönyv épült. Az általános iskola minden tanulója ugyanazt a tananyagot tanulta, és elvileg mindenkinek ugyanazokat a követelményeket kellett teljesíteni. Az egységes tanterveket egyes területeken évtizedek gyakorlati szakmai tapasztalata csiszolta (matematika, természettudományok), más területeken ki voltak szolgáltatva a politikai-ideológiai önkénynek. Az 1990-es években elindult folyamatokra erőteljesen hatott a korábbi angolszász modell, azonban az inga effektus is érvényesült, és a tantervi szabályozás átlendült a másik oldalra, a Nemzeti alaptanterv már csak minimális központi előírást tartalmaz. Ez a folyamat ellentétes azzal, ami ugyanebben az időszakban más országok-

ban lejátszódott. Összehasonlításként érdemes megjegyezni, hogy az amerikai matematika standardokat bemutató kötet (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000) önmagában terjedelmesebb, mint a Nemzeti alaptanterv első, 1995-ben megjelent változata. Időközben a magyar Nemzeti alaptanterv még rövidebb lett.

A standardok megjelenése és a standard alapú oktatás azonban nem egyszerűen egységesítést vagy központosítást jelent, hanem a tanulás tartalmainak szakszerű, tudományosan megalapozott elrendezését. Ebben a tekintetben eltér a korábbi magyar központi szabályozástól, ahol ez csak részben volt így. Az új szemléletű standardok kidolgozása olyan országokban is meghatározóvá vált, amelyeknek korábban is voltak egységes tantervei. Például Németországban, ahol az oktatás tartalmait tartományi szinten korábban is részletesen szabályozták, elkezdődtek az egységes standardok kifejlesztésére irányuló kutatások (*Klieme és mtsai.*, 2003). A standardok legfontosabb, meghatározó vonása a tudományos megalapozás igénye. A standardok kidolgozása, a standard alapú oktatás világszerte kiterjedt kutató-fejlesztő munkát indított el.

A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása során merítettünk mind a standard alapú oktatás elméleti megfontolásából, mind az egyes konkrét standardok tartalmi és formai megoldásaiból. Követtük a standardok kidolgozásának hagyományait abban is, hogy az egyes tartalmi-mérési területek sajátosságait érvényesítettük, és nem törekedtünk az olvasás, a matematika és a természettudomány tartalmainak leírásában a pontosan megegyező formai megoldásokra.

Az általunk kidolgozott tartalmi keretek azonban különböznek is a standardoktól abban a tekintetben, hogy nem követelményeket, nem elvárásokat határoznak meg. Közös vonásuk azonban a standardokkal a részletesség, a konkrét, pontos leírásra törekvés és a tudományos megalapozás igénye.

Tartalmi keretek

Az általunk elkészített részletes leírásokra a „tartalmi keretek” megnevezést használjuk (az angol *framework* megfelelőjeként). A mérések tartalmi keretei annyiban hasonlíthatnak a standardokra, hogy a tudás részletes, rendszerezett leírását tartalmazzák. Különbség azonban, hogy a standardok a kimenet felől közelítik meg az oktatást. A hagyományos tantervek-

kel ellentétben nem azt rögzítik, hogy mit kell tanítani vagy megtanulni. Nem határoznak meg elérendő követelményeket sem, bár a tartalmi leírások implicite kifejezik, hogy mit lehetne/kellene tudni a maximális teljesítményszinten.

A tartalmi keretek legismertebb példái a nemzetközi felmérésekhez készültek. A sok országra kiterjedő mérések esetében értelemszerűen szóba sem jöhet követelmények rögzítése. A tartalmi keretek ebben az esetben azt mutatják be, mit lehet, mit érdemes felmérni. A tartalom körülhatárolásánál különböző szempontokat lehet érvényesíteni. A korai IEA mérések esetében a részt vevő országok tantervei jelentették a kiindulási alapot, tehát az, hogy általában mit tanítanak az adott területen.

A PISA mérések tartalmi keretei a fő mérési területeken azt írják le, hogy milyen alkalmazható tudásra van szüksége a modern társadalmak tizenöt éves fiataljának. Ebben az esetben a tudás alkalmazása és a modern társadalom szükségletei, az alkalmazás tipikus kontextusai meghatározó szerepet játszanak a tartalmi keretek kidolgozásában, és természetesen az adott diszciplínák, iskolai tantárgyak tudásának alkalmazásáról van szó bennük.

Egy harmadik megközelítés lehet a tanulásra és a tudásra vonatkozó tudományos kutatás felőli, a fejlődéslélektan és a kognitív pszichológia eredményeiből kiinduló leírás. Ez a szempont domináns azokon a keresztterületi területeken is, amelyek nem egy (vagy néhány) iskolai tantárgyhoz kötődnek. Ilyen mérés volt például a tanulási stratégiákat és az önszabályozó tanulást középpontba állító negyedik területen a PISA 2000 felmérésben, amelynek tartalmi kereteit alapvetően pszichológiai szempontok, a tanulásra vonatkozó kutatási eredmények határozták meg (*Artelt, Baumert, Julius-Mc-Elvany és Peschar, 2003*). Pszichológiai szempontok alapján lehet leírni a tanulók attitűdjeit, amelyek vizsgálata szinte minden nemzetközi mérésben szerepel, és különösen kiemelkedő szerepet játszott a PISA 2006 természettudomány vizsgálatában (*OECD, 2006*). Hasonlóképpen, a pszichológiai kutatásokból ismerjük a problémamegoldó gondolkodás szerkezetét, ami a 2003-as PISA kiegészítő mérési területe volt (*OECD, 2004*), és a legfrissebb kognitív kutatásokra épül a PISA 2012 keretében lebonyolítandó dinamikus problémamegoldás felmérés.

A diagnosztikus mérések számára készített tartalmi keretek (lásd az 5. fejezetet) merítették a nemzetközi mérések tartalmi kereteinek munkála-

taiból. Annyiban hasonlítanak a PISA tartalmi kereteire (pl. *OECD*, 2006, 2009), hogy három fő mérési területre fókuszálnak, az olvasás, a matematika és a természettudomány felmérését alapozzák meg. Különböznek azonban abban a tekintetben, hogy a PISA egy korosztályra, a tizenöt évesekre fókuszál, így egy metszetet ad a tanulók tudásáról. Ezzel szemben a mi tartalmi kereteink hat évfolyamot fognak át, fiatalabb tanulókkal foglalkoznak, és jelentős hangsúlyt kap a fejlődési szempont.

A PISA tartalmi keretei egy adott mérési ciklusra készülnek. Bár az egyes mérési ciklusok között sok az átfedés, minden egyes ciklusban frissülnek is. A PISA tartalmi keretek az egész értékelési folyamat leírását átfogják, a mérési terület meghatározásától (*defining the domain*) a területet szervező alapelvek kifejtésén (*organizing the domain*) keresztül az eredményeket leíró skálákig (*reporting scales*) és az eredmények interpretálásáig. Az általunk kidolgozott tartalmi keretek e folyamatból csak a mérési terület meghatározását, a szervező elvek bemutatását és a tartalom részletes leírását fogják át. Bemutatják a mérések fő dimenzióit, a mérési skálák tartalmát, de nem foglalkoznak a skálán elérhető szintekkel és a skálázás kvantitatív kérdéseivel. Tekintettel a fejlődési szempontokra, a skálák kidolgozására csak további elméleti előmunkálatok és az empirikus adatok birtokában kerül sor.

A mérések tartalmának több szempontú megközelítése

Az utóbbi évtized oktatási innovációit főleg az integratív szemlélet határozta meg. Az érdeklődés középpontjába került kompetenciák maguk is különböző tudáselemek (egyes értelmezések szerint további, affektív elemekkel kiegészült) komplex egységei. A kompetencia alapú oktatás, a projektmódszer, a tartalomba ágyazott képességfejlesztés, a tartalomba integrált nyelvtanítás és még sok más innovatív tanítási-tanulási módszer egyidejűleg több célt valósít meg. Az ilyen integratív megközelítések révén megszerzett tudásról feltételezhető, hogy könnyebben transzferálható, szélesebb körben felhasználható. A szummatív jellegű kimeneti tesztek hasonló elvek szerint épülhetnek fel, ezt a megközelítést követik a PISA tesztek és a magyar kompetenciamérések is.

Másfajta mérési megoldásra van azonban szükség akkor, ha a tanulás problémáit szeretnénk megelőzni, a lemaradásokat, a későbbi sikereket

veszélyeztető hiányosságokat szeretnénk azonosítani. Ha a mérések eredményét a szükséges beavatkozások meghatározására használjuk, nem elég a tanulók tudásáról globális indikátorokat szolgáltató tesztet készíteni. Nem elég megállapítani, hogy a tanuló meg tud-e oldani egy komplex feladatot. Fel kell deríteni azt is, hogy mi az esetleges kudarc oka, vajon az alapvető ismeretei hiányoznak, vagy pedig azok a gondolkodási műveletei nem kellően fejlettek, amelyek az ismeretek logikus következtetési láncokká szervezéséhez szükségesek.

A diagnosztikus mérésekhez a tanulói tudás részletesebb leírására van szükség, ezért a tanításban érvényesülő integratív megközelítéssel ellentétben az analitikus megközelítést alkalmazzuk. Ugyanakkor a tanulást segítő méréseknek igazodniuk is kell az oktatás konkrét folyamataihoz. E követelménynek megfelelően kialakulóban van a diagnosztikus és formatív felmérések technológiája, amely merít a nagymintás szummatív mérések tapasztalataiból, ugyanakkor számos új elemmel gazdagítja is a mérési eljárásokat (*Black, Harrison, Lee, Marshall és Wiliam, 2003; 2005; Leighton és Gierl, 2007*).

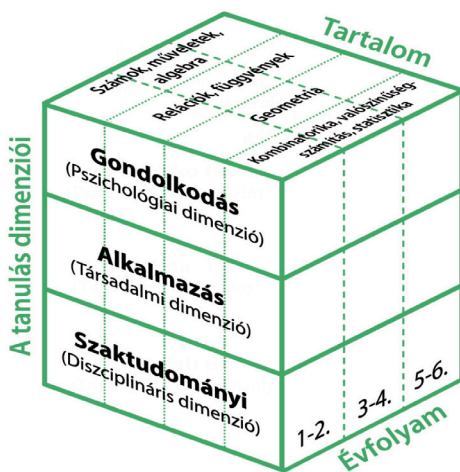
A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása szempontjából számos tanulsága van a hasonló területeken végzett korábbi munkáknak, különösen a kisgyermekkorban alkalmazott felméréseknek (*Snow és Van Hemel, 2008*) és az iskola kezdő szakaszára kidolgozott formatív technikáknak (*Clarke, 2001*). Számunkra ezek közül is a legfontosabb a több szempontú, analitikus megközelítés, a pszichológiai és a fejlődési elvek hangsúlyossá tétele. Ugyanakkor a korábbi formatív és diagnosztikus rendszerek papír alapú teszteket használtak, ami erősen korlátozta a lehetőségeiket. Mi online számítógépes teszteket alkalmazunk, ami gyakoribb és részletesebb méréseket tesz lehetővé. A korábbiaknál nagyobb felbontású felméréseket végezhetünk, amelyhez alkalmazkodni kell a tartalmi kereteknek is.

A mérendő tartalom elrendezésének szempontjai

A felmérések tartalmát három fő szempont szerint rendezhetjük el. A három változó szerinti elrendezés egy háromdimenziós tömböt alkot, melynek vázlatát a *4.1. ábrán* mutatjuk be. A mérések tartalmának kifejtéséhez azonban ezt a háromdimenziós tömböt, annak egyes blokkjait lineá-

risan kell elrendezni. A tömb elemeit többféle módon felsorolhatjuk, attól függően, hogy hogyan szeleteljük fel, melyik dimenzió mentén készítünk metszetet először, másodsor, majd harmadszor. Itt azt az elrendezési szempontot mutatjuk be, amelyik legjobban megfelel a diagnosztikus értékelés követelményeinek.

Az elsőként kiemelt szempont maga is egy többdimenziós rendszer, amely az elemzésünk három fő dimenzióját, a pszichológiai (gondolkodási), a társadalmi (alkalmazási) és a diszciplináris (szaktárgyi) dimenziókat jeleníti meg. Ez a három dimenzió az, melyekre mindegyik fő mérési területen (olvasás, matematika, természettudomány) fejlődési skálákat dolgozunk ki. (Az 5. fejezetben foglalkozunk vele részletesebben.)



4.1. ábra. A mérések tartalmának több szempontú elrendezése

A második szempont a fejlődés. Ebben a tekintetben a hat évfolyamot három kétéves blokkra bontottuk, az 1–2., a 3–4. és az 5–6. évfolyamokat foglalva egy-egy csoportba. Mivel azonban a hat évfolyamot egységes fejlődési folyamatnak tekintjük, ez csak egy technikai megoldás a tartalom elrendezésére. Empirikus bizonyítékok hiányában az életkorhoz (évfolyamhoz) rendelés egyébként is csak hozzávetőleges lehet.

Végül a harmadik szempont az adott mérési területen rendelkezésre álló tartalmak köre. Az így lebontott tartalmi blokkok alkotják a részletes tartalmi keretek egységeit. A különböző szempontok kombinálása miatt az egyes szempontok értékeinek növelése könnyen kombinatorikai rob-

banáshoz vezethet. Így esetünkben a konkrét mérési tartalmak számát kell mértéktartóan kezelni. A három fejlődési dimenziót, három életkori blokkot és matematika esetén négy fő tartalmat megkülönböztetve 36 blokk adódik. További részterületek megkülönböztetésével ez a szám rohamosan növekedne.

A diagnosztikus mérések skálái, a pszichológiai, az alkalmazási és a diszciplináris dimenzió

Korábbi empirikus vizsgálataink tapasztalatai alapján egy olyan modellt dolgoztunk ki, amelynek három dimenziója megfelel az oktatás három fő céljának. Ezek a célok végighúzódnak az iskolázás történetén, és megfelelnek a modern iskolai teljesítménymérés fő irányainak (Csapó, 2004, 2006, 2010).

Az értelem kiművelése, a gondolkodás fejlesztése olyan cél, amely nem külső tartalmakat nevez meg, hanem belső tulajdonságra hivatkozik. Modern terminológiával ezt *pszichológiai* dimenzióknak nevezhetjük. Az előző részben már utaltunk arra, hogy a PISA vizsgálatokban is megjelent ez a dimenzió. Több olyan mérési területet is láttunk, amely pszichológiai eredmények alapján értelmezte a mérés tartalmát. A matematika terén ez a dimenzió azt vizsgálja, fejleszti-e a matematika a gondolkodást, az általános kognitív képességeket vagy a szűkebb értelemben vett matematikai gondolkodást az elvárható mértékben.

Egy másik régi cél, hogy az iskola nyújtson hasznosítható, iskolán kívül is alkalmazható tudást. Ezt a szempontot *társadalmi* dimenzióknak nevezzük, és a tudás hasznosíthatóságát, alkalmazhatóságát értjük alatta. A tudás alkalmazása rokon fogalom a tudástranszferrel, amely egy adott kontextusban elsajátított tudás alkalmazását jelenti egy másik kontextusban. A transzfernek lehetnek fokozatai, amelyet a transzfertávolsággal lehet jellemezni. A matematikai tudás alkalmazása minden olyan feladatmegoldás, amely a matematika egy adott területén tanultakat egy másik területen alkalmazza (közeli transzfer), vagy kivezet a tiszta matematika világából, és a feladatot más tantárgyak keretei közé vagy gyakorlati kontextusba helyezi (távoli transzfer).

A harmadik gyakran említett cél az, hogy az iskolában a tanulók elsajátítsák mindannak a tudásnak a lényeges elemeit, amelyet a tudományok

és a művészetek felhalmoztak. Ez a cél valósul meg, amikor a tanulók a diszciplína, a tudományterület szempontjai és értékei szerint közelítenek a tanuláshoz. Ez a szaktantárgyi vagy *diszciplináris* dimenzió. Az utóbbi években több olyan oktatási törekvés indult el, amely a korábbi, egyoldalú diszciplináris megközelítést kívánta kiegyensúlyozni. A kompetencia alapú oktatás és az alkalmazást középpontba állító tudásszintmérés némileg elhomályosította a szaktudományok szempontjait. Ahhoz azonban, hogy a tananyag szaktudományi szempontból összefüggő, egységes és így megérthető rendszert alkosson, szükség van azoknak a tudáselemeknek az elsajátítására is, amelyek közvetlenül nem szolgálják az alkalmazást vagy a gondolkodás fejlesztését. A fogalmak tudományos érvényességének kialakítása, a pontos meghatározások ilyen tudáselemek.

A háromdimenziós modell azt jelenti, hogy ugyanaz a tartalom (esetleg kisebb hangsúlyeltolódással) felhasználható mindhárom dimenzióban feladat írására. Ezt a kombinatív képesség példájával szemléltethetjük. A gyerekekben kialakul a kombinatív képesség elemi szintje pusztán a környezettel való interakció révén. Ezt a gondolkodást fejlesztik az iskolai gyakorlatok, és ennek megfelelően fel lehet mérni, hol tart a kombinatív gondolkodás, mint az általános kognitív fejlődés egyik területe. Készíthetünk egy olyan feladatot is, amelyben a kombinatív gondolkodást és esetleg az iskolában tanult kombinatorika tudását új, hétköznapi helyzetben kell alkalmazni. Végül ellenőrizhetjük, hogy a tanulók tudják-e, mi a variáció és a kombináció, továbbá hogyan lehet a kiszámításukhoz szükséges formulákat levezetni. Ez utóbbi már olyan tudás, amelyet nem lehet a kognitív fejlődést stimuláló gyakorlatokkal kialakítani, csak a megfelelő szaktárgyi matematikatudás elsajátításával.

A három mérési terület között a matematika sajátos helyzetet foglal el abban a tekintetben, hogy a matematikai gondolkodás fejlődése – különösen az iskola kezdő szakaszában – szorosan összefügg az általános értelmi fejlődéssel. A matematika minden területén meghatározó szerepe van a műveltségvesztésnek, a gondolkodásnak. Ezért a három dimenzió nem minden esetben válik el olyan élesen egymástól, mint a másik mérési területeken. Ebből következően gyakran egy feladaton belül is megjelenhetnek a különböző dimenziók szempontjai.

A matematikai gondolkodás képességei

A matematikai gondolkodás elemeit a kötet első fejezete tekinti át. A fejezet a matematikai gondolkodás képességeinek föltárásában egyaránt támaszkodik *Piaget* és *Vigotszkij* munkásságára, és ezen túl egy olyan képességrendszer javasol, amely kellően általános, és ugyanakkor sajátosan matematikai. A kellő általánosság azt jelenti, hogy a gyakran különböző elnevezésekkel illetett matematikai gondolkodási folyamatok leírását négy alapvető gondolkodási formára vezeti vissza. A fejezetben vázolt képességrendszer ugyanakkor mégis sajátosan matematikai. Függetlenül a matematikatudomány konkrét területi tagozódásától és a társadalmi elvárásokból fakadó követelményektől, az egész és a racionális számok, az additív és multiplikatív gondolkodási formák együttes rendszere a matematikai gondolkodás leírását nyújtja. A következőkben két olyan fogalomkörön keresztül teremtünk további kapcsolatot az elméleti fejezet és a részletes tartalmi keretek között, amelyek fontos szerepet játszottak az elmúlt két évtized nemzetközi kutatásaiban.

Problémamegoldó gondolkodás

A matematikai gondolkodás kutatásának irodalmában jelentős arányt képviselnek azok a megközelítések, amelyek az általános problémamegoldás részterületeként tekintenek a matematikai gondolkodásra. Általánosságban az olyan feladatot nevezük problémának, amelynek megoldási folyamatában nincs kész algoritmusunk, amelyet követhetünk, hanem a feladat tudatos tervezési, nyomon követési és ellenőrző folyamatok felhasználását igényli. Az olyan kérdésekre adandó válaszadás, mint például: „hogyan mérhető le az iskolaudvar hossza a lépéseinkkel?” vagy „hány liter víz fér az otthoni fürdőkádba?”, lehetővé teszik, hogy a tanulóink a problémát részekre bontsák, analizálják, majd a problémamegoldás lépéseit áttekintsék, a problémát megoldják. Az ilyen módon értelmezett problémamegoldó gondolkodás fejlődésének feltétele és segítője a matematikai fogalmak, szimbólumok ismerete és a matematikai készségek és képességek fejlődése.

A matematikai problémamegoldásban, a szűkebb értelemben vett (és az 1. fejezetben részletesebben bemutatott) matematikai képességeken túl

a gondolkodás más képességei is szerepet játszanak. Ezek teszik lehetővé, hogy a matematikai műveleteket új, ismeretlen helyzetekben alkalmazzuk, a begyakorolt rutinfeladatokon túlmutató problémák megoldásában is.

A problémamegoldó gondolkodás vizsgálata elsősorban a szöveges feladatok kitűzésének és a megoldási folyamat elemzésének technikáját alkalmazza (Csikos, Kelemen és Verschaffel, 2011). A szöveges feladatok mint a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének természetes eszközei már az 1–2. osztályban megjelennek. A szöveges feladatok megoldásának azonban előfeltétele a megfelelő szövegértés. A szöveg hosszúságának, nyelvtani bonyolultsági fokának igazodnia kell a tanuló fejlettségi szintjéhez. Ez eleinte két-három egyszerű mondatot jelenthet csupán. Újabb fejlődési fokozat, amikor a szöveget már nem hallás után kell feldolgozni, hanem önálló olvasás során. A 3–4. osztályban már megfigyelhető, hogy az eredetileg a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére – a valóság matematikai modellezésének változatos eszközein keresztül – lehetőséget nyújtó szöveges feladatok egyre inkább a számolási készség további fejlesztésének gyakorlóterepévé válnak. Fontossá válik emiatt a feladat szövegének megértése és a megértést lehetővé tevő problémareprezentáció.

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének fontos módszere a gondolkodási folyamatok szavakba öntése, a „miért?” kérdések megfogalmazása (Pólya, 1945/1957). A feladatról alkotott belső, mentális képeink megbeszélése, a feladatokhoz rajzok készítése (amelyek egymástól jelentősen különbözhetnek, hiszen a mentális modellek egyénre szabottak) elősegíti a problémamegoldó gondolkodás stratégiai, metakognitív elemeinek fejlődését.

Matematikai készségek és képességek

Az utóbbi két évtized jelentős törekvése volt azoknak a készségeknek és képességeknek az azonosítása, amelyek a matematika területéhez köthetők, akár a fejlesztés, akár az értékelés szemszögéből. Az intelligenciakutatás egyik irányzata például arra vállalkozott, hogy a mérhető pszichikus tulajdonságok közötti különbségek alapján az intelligencia szerkezetét föltárja. Carroll (1993) monográfiájában összegezte az ilyen kutatások tapasztalatait, majd később vállalkozott az intelligencia képesség-rendszerében a matematikai képességek leírására. Carroll szerint a matematikai

teljesítményben a fluid intelligencia számos összetevőjének közvetlen szerepe igazolható. Például az általános következtetési gondolkodás, a mennyiségi gondolkodás vagy az úgynevezett piaget-i gondolkodás. A kristályos intelligencia elemei közül is többet kiemel, mint a matematikai képességek fontos összetevőjét.

A nyelvi fejlődés jelentősége többek között abban van, hogy az emberek hajlamosak egy bizonyos, kitüntetett nyelven számolni, és a különböző nyelvekben megfigyelhető számnevezések hatással vannak a számolási készség működésére is. A verbális és írott nyelv megértésének képessége is nyilvánvalóan fontos szerepet játszik a matematikai szöveges feladatok megértésében. A számolási készség több összetevője is azonosítható az intelligencia faktoraiban: az átfogó kognitív gyorsaság és a számolási könnyedség egyaránt mérhető elemei a gondolkodásnak.

A számolási készségek kialakulásának, illetve korai fejlődésének vizsgálatára a magyarországi kutatási programok közül a legrészletesebben a PREFER, illetve a DIFER mérőeszközök kifejlesztése során került sor (Nagy, 1980; Nagy, Józsa, Vidákovich és Fazekasné, 2004).

A matematikai gondolkodás képességeinek egy másik jelentős területét jelentik az általános következtetési gondolkodás képességei. Őt olyan gondolkodási képességet említünk, amelyek a hazai pedagógiai gondolkodásban és a diagnosztikus értékelési programokban már megjelentek: induktív (Csapó, 2002), deduktív (Vidákovich, 2002), rendszerezési (Nagy, 1990), kombinatív (Csapó, 1998) és korrelatív (Bán, 2002) gondolkodás. Ezek a matematikában is szerepet játszó képességek változatos matematikai tartalmak esetén értékelhetők és fejleszthetők.

A matematikai tudás alkalmazásának területei

A matematikai fogalmak kialakulása során természetesen folyamatos kölcsönhatás van a megfigyelt jelenségek és a kialakuló matematikai fogalmak között. Rényit (2005. 39. o.) idézve: „Amikor a gyereket számolni tanítják, először kavicsok vagy pálcikák megszámlálására tanítják őket. Csak ha már a gyerek meg tud számolni kavicsokat és pálcákat, akkor képes eljutni odáig, hogy megértse, nemcsak két kavics és három kavics az öt kavics, hanem, hogy két valami és három valami az mindig öt valami, vagyis hogy kettő meg három az öt.”

A matematikai fogalmak megértése és használata több szinten lehetséges: a megértés kognitív tudományi értelmezése gyakran a belső disszonancia megszűnéseként tekint a megértésre (Dobi, 2002). A megértésnek az a szintje, amikor – ahogyan például Rényi Alfréd teszi – magukról a matematikai fogalmakról tesz megállapításokat, a megértésnek egy magasabb szintjét jelentik. Ezt a magasabb szintet Skemp (1975) reflektív matematikai gondolkodásnak nevezi.

A matematikai tudás alkalmazásának értékelése során szöveges feladatokat oldanak meg a tanulók, amelyekben helyet kapnak a hétköznapi tapasztalataikból ismert fogalmak és matematikai jelenségek. Az ókortól kezdve a szöveges feladatoknak legalább három funkciója él egymás mellett.

- (1) A matematikai tudás „szövegbe öltöztetése”, vagyis a matematikai készségek és képességek fejlesztése és gyakoroltatása szöveges feladatokon keresztül. Ebben az esetben a feladatok szövege ismerős, barátságos, ugyanakkor nem feltétlenül egy gyakorlati problémát jelenít meg. Az ilyen feladatokat Szendrei Julianna „tanpéldának” nevezi (Szendrei, 2005). A tanpéldák – vagy ahogyan a továbbiakban nevezzük őket: szöveges gyakorlófeladatok – tehát elsősorban a matematikai készségek és képességek fejlesztésére, a gyakoroltatásra szolgálnak, és a feladatok szövegének konkrét tartalma – bizonyos keretek között – szabadon változtható.
- (2) A matematikai szöveges feladatok az embert körülvevő világ matematikai modellezésének eszközeit is jelentették. Az ókori egyiptomi írnok és a reneszánsz kori velencei kalmár matematikai képésében olyan feladatok uralkodtak, amelyekben hétköznapi szituációk, a későbbiekben valóságosan megoldandó problémák jelentek meg.
- (3) Szintén több ezer éves múltja van a rekreációs és rejtély jellegű matematikai szöveges feladatoknak. Archetípusa ennek a feladatnak a „hány éves a kapitány?” jellegű nonszensz feladatkitűzés és az olyan feladatok, amelyekben a megoldónak ki kell találnia, vajon mire gondolt valójában a feladat kitűzője. Ide tartoznak a nyilvánvalóan adathiányos feladatok ugyanúgy, mint azok, amelyeket a kreativitás pszichológiájának kutatói a belátásos (*insight*) problémák közé sorolnak (Kontra, 1999).

A szöveges feladatok említett funkciói gyakran egymással összekapcsolódnak. Elképzelhető, hogy egy adott iskolai évfolyamon belül egyesek számára egy feladat rutinszerűen megoldható szöveges gyakorlófel-

adat, míg mások számára a világ matematikai modellezésének eszköze. Sőt, a feladatkitűzés módjától is függhet, hogy a tanuló ugyanazt a szöveges feladatot gyakorló tanpéldának tekinti vagy pedig olyannak, amelynek megoldása során ismereteit mozgósítva több lehetséges matematikai modell közül választhat. A matematikai tudás alkalmazásáról szóló elméleti fejezetben több példát is láthatunk, amelyekben hátrányba kerültek azok a tanulók, akik nem tanpéldának tekintettek egy-egy szöveges feladatot. Általánosságban elmondható, hogy a szöveges feladatok megoldásának menetére vonatkozó információ a matematikai tudás részét képezi. A pedagógus szerepének jelentőségére utal az a megállapítás, miszerint osztályonként más és más szocio-matematikai normákat sajátítanak el a tanulók a feladatmegoldás mibenlétéről, menetéről és rituáléjáról.

Realisztikus szöveges feladatok

A matematikai tudás alkalmazásáról szóló elméleti fejezetben leírtak alapján a szöveges feladatoknak van egy olyan csoportja, amelynek elsődleges funkciója nem valamely matematikai művelet vagy tudáselem szövegbe öltöztetése, hanem a tanulók számára ismert, a képzeletükben és tapasztalatukban megragadható tudáselemek matematikai modellezésének elősegítése. Hol húzódik a határ a tanpéldák és a realisztikus szöveges feladatok között?

Önmagában véve egyetlen feladatot sem nevezhetünk realisztikusnak vagy nem realisztikusnak. A nem realisztikus és a realisztikus feladatok szétválasztásához több tényezőt szükséges figyelembe venni. Legalább három tényezőtől függ, hogy egy szöveges feladat realisztikusnak tekinthető-e.

- (1) A feladat szövegében előforduló dolgok és tulajdonságok szerepe: amennyiben a feladat szövegében szereplő dolgok (szereplők, jelenségek, tulajdonságok) lényeges részét képezik a feladatnak abban az értelemben, hogy ezek megváltoztatása a megoldás folyamatában is lényeges változást okoz, valószínűsíthető, hogy realisztikus feladatról van szó.
- (2) A feladatban szereplő dolgok és a meglévő tanulói tudás viszonya: a realisztikus jelző eredeti értelmében a feladatban szereplő dolgok elképzelhetőségére utalt. Nem követelmény egy realisztikus feladat

esetében, hogy a hétköznapi valóság tárgyai szerepeljenek a szövegben; lehetséges, hogy a hétfejű sárkányról szóló kombinatorikai feladat realiztikus.

- (3) Az osztálytermi szocio-matematikai normák határozzák meg, hogy mennyire kötött rituáléja és szabályrendszere van annak, hogy a szöveges feladatok során milyen lépéseket várunk el. Ebből a szempontból gyakran a realiztikus feladatok indikátora lehet, ha a szöveges gyakorlófeladatoknál ismertetett, „megszokott” algoritmus csődöt mond a feladatmegoldás folyamatában.

Gyakori, hogy realiztikus feladatok esetén már az adatok kigyűjtése, majd pedig az elvégzendő műveletek meghatározása olyan matematikai modell kiválasztásával jár, amelyben tervező, nyomon követő és ellenőrző (tudatos) folyamatok zajlanak.

Autentikus feladatok

A realiztikus feladatok halmazán belül egy sajátos csoportot alkotnak az úgynevezett autentikus feladatok. A vonatkozó elméleti fejezetben definiáltuk a feladattípus jellemzőit, azokat a részletes tartalmi és értékelési keretek fejezeteiben a konkrét matematikai részterületeken jellemezzük és példákkal illusztráljuk.

Az autentikus feladatok a tanuló tapasztalataira s tevékenységére épülő szöveges feladatok, amelyek gyakran intranszparens problémák. A realiztikus feladatok között az autentikus feladatok sajátossága, hogy hangsúly kerül a tanulói tevékenységre, amely szükségszerűen kapcsolódik a motiváltság és a bevontságérzés kategóriáihoz. Külső, formai jegyek alapján az autentikus feladatok gyakran a hosszabb szövegükről ismerhetők fel, amelyben egy valóságos problémahelyzet leírása történik, gyakran – matematikai szempontból – fölösleges vagy éppen hiányzó adatokkal. Ugyancsak formai jegye lehet az autentikus feladatoknak, ha azokban a tanulót a leírt problémahelyzethez kapcsolódó feladatkitűzésre kérjük. A feladatmegoldó folyamat jellemzői közül pedig azt emeljük ki, hogy az autentikus feladatokban nincs közvetlen, nyilvánvaló algoritmus a megoldásnak, tehát valódi matematikai modellalkotásra van szükség, amelynek során úgynevezett tevékenység zajlik. A külső szemlélő által is megfigyelhető tevékenységformák között megemlítjük az adat-

gyűjtést (akár külső forrásokból, akár megbeszélés módszerével), a méréseket, az előzetes tanulói tudás alapján folytatott vitát és párbeszédet.

Sok esetben – ahogyan az a hétköznapi autentikus problémákra is jellemző – nincs egyetlen, jól definiált megoldása a feladatnak, viszont pedagógiai szempontból a matematika művelésének folyamata (a tervezés folyamatából induló, a feladatmegoldást nyomon követő és értékelő matematizálás) gyakran önmagában az autentikus probléma megoldásával egyenértékű. Az autentikus feladatok megoldásának folyamata gyakran zajos csoportmunkát igényel, ilyen módon fölrúgva olyan hagyományokat, amelyeket laikusok és pedagógusok is a matematikaórák jellemzőjeként kezeltek korábban.

A matematikai problémamegoldás egyik első általános modellje *Pólya György* (1945/1957) nevéhez fűződik. Azok a lépések, amelyeket ő általában a sikeres matematikai feladatmegoldás lépéseként leír, legszembe-tűnőbben a realizisztikus (és azon belül az autentikus) feladatok megoldása során érthetők tetten. Azok a kérdések, amelyeket *Pólya* munkájában megtalálunk – és amely kérdéseket az utókor metakognitív kérdéseknek nevez – a probléma matematikai jellemzői mellett a megoldó személy és a matematikai probléma viszonyára vonatkoznak. „Át tudod-e fogalmazni a problémát a saját szavaiddal?” „Tudsz-e olyan ábrára vagy diagramra gondolni, amely segíthet a probléma megoldásában?”

A matematikatudomány szerinti részterületek

A matematikai tudás diagnosztikus értékelése során a feladatok természet-szerűleg kötődnek a matematikatudomány egy-egy részterületéhez. A harmadik fejezetben leírtak alapján az iskolai matematika területei alapvetően megfelelnek a matematikatudomány jelenlegi tagozódásának. Különböző évfolyamokon más-más területre kerül a hangsúly, és az egyes területeknek eltérő történeti fejlődési vonaluk van a hazai közoktatásban.

Számok, műveletek, algebra

A számok, műveletek, algebra témakör a matematikatanítás alappillére. Az 1. és 2. osztályos matematikában a legtöbb időt és energiát a számo-

lási készség fejlesztése veszi igénybe. Ez a tartalmi terület magában foglalja a számfogalom fejlődését, a számkör bővülését, a négy matematikai alapművelet elsajátítását és a számok helyett alkalmazott jelekkel az algebrai gondolkodás előkészítését. Ezen túl az alkalmazott matematikai tudás követelményei kapcsán a valóságban megfigyelhető számosságok és a matematikai alapműveletekkel leírható hétköznapi jelenségek modellezése is ehhez a területhez tartozik.

Kulcsfontosságú a témakör megértéséhez számba venni *Dehaene* (1994) hármaskódelméletének pedagógia konzekvenciáit. A számok (első sorban a természetes számok) nevei, az arab számok leírt alakja és az adott számhoz kapcsolódó mentális mennyiségrepresentáció kölcsönös kapcsolatrendszerei teszik lehetővé, hogy a tanulók biztos számfogalommal rendelkezzenek. Már óvodáskor előtt néhány szám nevét tudják a gyermekek, kisebb számosságok esetén azt értő módon használják is (például két fül, három ceruza), a számok leírt alakja azonban jellemzően az iskolás években kapcsolódik össze a számnevekkel.

A számokhoz kötődő mennyiségrepresentációk fejlődésével kapcsolatos kutatási eredmények szerint például a mentális számegyenes 2. osztályos korban a 100 alatti természetes számok esetében meglehetősen pontos és már lineáris felépítésű (*Opfer* és *Siegler*, 2003), lehetővé téve, hogy 2. osztály végére az úgynevezett százaz számkörben a számok leírt alakja, a számok verbális elnevezése és mindezekhez valamilyen mennyiségrepresentáció hatékony kapcsolatrendszere jöjjön létre.

A matematikai alapműveletek elsajátításának leírásában a készségfejlődés és -fejlesztés törvényszerűségeit alkalmazhatjuk. A fejlődés szakaszait jól ismerjük: a nevezetes szakadási pontokat, amelyek a számlálásban akadályokat jelenthetnek, mint 6 után a 7-hez, vagy 16 után a 17-hez eljutni (*Nagy*, 1980). Arról is vannak adataink, miként válik az alapműveleti számolási készség működése esetenként túlaautomatizálódottá az alsó tagozatos korban; ez a probléma a szöveges feladatok és a valóság mennyiségi összevetése (illetve ennek elmaradása) esetében szembetűnő. Az algebrai jelölések bevezetésében az egyszerű geometriai formák dominálnak ebben a korosztályban (négyzettel, körrel, félkörrel stb. jelöljük az ismeretlen mennyiségeket).

Relációk, függvények

A gondolkodás egyik sajátossága, hogy szabályszerűségeket, mintázatokat keres az őt körülvevő világban. A matematikai gondolkodás területén az összefüggések felismerése és leírása több tartalmi területhez is besorolható, attól függően, hogy milyen adatok és jelenségek között keresünk összefüggést, és az összefüggést determinisztikus vagy valószínűségi jellegűnek tekintjük.

A relációk és függvények matematikai definícióiban halmazok és halmazok közötti hozzárendelések szerepelnek. Mind a halmazok, mind a hozzárendelések a matematikai alapfogalmak közé tartoznak, vagyis fokozott jelentősége van annak, hogy ezeket az alapfogalmakat a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz, a már meglévő képzetekhez és elemi fogalmakhoz kapcsoljuk. A témakör kapcsán különös nehézséget okoz, hogy a relációk és függvények absztrakt matematikai fogalmait milyen mértékben köthetjük olyan vizuális képzetekhez, mint amilyenek a „gépjátékok” táblázatai vagy a kétdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázolt görbék.

A Nemzeti alaptantervben a függvényekkel kapcsolatos követelmények jelentős része nincs iskolai évfolyamhoz kötve, ami az értékelési keretek szempontjából azt jelenti, hogy a tanulók fejlődő gondolkodásának értékelését jól definiált, egymásra épülő feladatrendszerhez érdemes kapcsolni. Például az a Nemzeti alaptantervben szereplő követelmény, hogy „Együttváltozó mennyiségek összetartozó adatpárjainak, adathármasainak jegyzése: tapasztalati függvények, sorozatok alkotása, értelmezése stb.” a közoktatás valamennyi évfolyamára érvényes. Az értékelés tartalmi keretei szempontjából ugyanakkor döntést kell hoznunk, hogy miképpen operacionalizáljuk az egymásra épülő tudáselemeket, és mely életkori blokkban helyezzük el azokat. Ennél a konkrét követelménynél a következő kérdések lehetnek relevánsak: Milyen együttváltozó mennyiségek szerepeljenek a feladatokban? Mely évfolyamokban szerepeljenek adatpárok, és mely évfolyamokon adathármasok? Milyen módszerrel adja meg a tanuló az adatok közötti összefüggést? Milyen szókinccsel várunk el az egyes évfolyamokon a változók közötti összefüggések jellegére és szorosságára vonatkozóan? E szaktudományi szempontú kérdéssor mellett előrebocsátjuk, hogy a „Relációk, függvények” témakört nagyon fontos eszköznek tartjuk az arányossági gondolkodás és (még

általánosabban) a multiplikatívnek nevezett matematikai gondolkodási formák fejlesztéséhez.

Geometria

A geometriáról a hagyományos tantervi beágyazottság hasonlóképpen elmondható, minként azt a „Számok, műveletek, algebra” témakör kapcsán tettük. Az IEA-vizsgálatok nemzetközi tanterv-összehasonlító elemzése alapján hazánkban a matematika tantervekben a geometria aránya igen jelentős (lásd *Robitaille* és *Garden*, 1989).

A matematika műveltségterületen a Nemzeti alaptanterv bevezetőjében felsorolt célok, értékek és kompetenciák közül kiemelt fontosságú a tájékozódás, amely a geometria egyik részterületeként definiálható. A geometria és a mérések témakör alkalmas mind a tájékozódás a térben, mind pedig a tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban célkitűzések megvalósítására.

A megismerés területének minden pontja megjelenik a témakör feldolgozása során. Talán külön kiemelhető, hogy az alkotás különféle módzatai (öntevékenyen, saját tervek szerint, adott feltételeknek megfelelően), illetve a kreativitás jó terepet kap a geometria tanulásának kezdeti szakaszában is. Az alkotások velejárója az együttműködés és a kommunikáció is.

A tér- és síkgeometriai szemléletet a gyermekek konkrét tárgyi tevékenységével, a valóságot bemutató, a legkülönbözőbb technikákkal nyert anyagok, modellek (pl. tárgyak, mozaikok, fotók, könyvek, videó, számítógép) segítségével alakítjuk.

Az NCTM említett tartalmi követelményeiben a geometriától elkülönített területként jelenik meg valamennyi iskolai évfolyamon a mérés területe. Fölfogásunk szerint a geometriai területen belül helyezhetők el a méréssel kapcsolatos alapelvek és követelmények. A következő két lista, amelyben kiemeltük, hogy az NCTM mit tekintett a legjelentősebb követelményeknek a geometria és a mérés területeken, világossá teszi, hogy a hazai matematikatanítási hagyományban jól megfér egymás mellett a két terület egy egységes „geometria” esernyő alatt.

Az NCTM Standard erre a korosztályra geometria témakörben a következő célkitűzéseket és elvárásokat tartalmazza:

- (1) Két- és háromdimenziós geometriai alakzatok jellemzői és tulajdonságainak felismerése, megnevezése, építése, rajzolása, jellemzése, matematikai vitakészség kialakítása a geometriai összefüggésekről.
- (2) Tájékozódás síkon és térben, térbeli relatív pozíciók leírása, megnevezése, interpretálása, ismeretek alkalmazása.
- (3) Transzformációk (eltolás, elforgatás, tükrözés) felismerése és alkalmazása, szimmetrikus alakzatok felismerése és létrehozása.
- (4) Geometriai alakzatok mentális képének előállítása térbeli memória és vizuális memória felhasználásával, különböző perspektívákban ábrázolt alakzatok felismerése és értelmezése, geometriai modellek használata a problémák megoldásában.

A mérés témakörében az NCTM Standard célkitűzései és elvárásai szintén hasonlóak a kerettantervekéhez:

- (1) A tárgyak és egységek, rendszerek és folyamatok mérhető tulajdonságainak megértése (hosszúság, súly, tömeg, térfogat, terület, idő mérésének megértése, tárgyak összehasonlítása és rendezése ezek alapján a tulajdonságok alapján, hogyan mérünk alkalmi és standard mértékegységekkel, tulajdonság mérésére alkalmas eszköz és egység megválasztása).
- (2) A méretek meghatározására alkalmas technikák, eszközök és szabályok alkalmazása (a mérés összehasonlítás, egység választása, a mérőeszközök használata).

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanítása a közoktatás első hat évfolyamán főleg a tapasztalatszerzést célozza. Ennek tükrében a tantervi követelmények sem tartalmazznak sok ismeretet, az alapkészségek fejlesztése kapja a nagyobb hangsúlyt. A távlati konkrét szaktantárgyi tudás azonban a kombinatív és valószínűségi gondolkodás tapasztalati megalapozása nélkül elképzelhetetlen.

A kezdő szakaszban a tanulók kombinatív gondolkodását elsősorban a rendszerezés fontosságának megértetésén keresztül formáljuk. A gyerekeknek eleinte még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. Kétféle gondolati

igényességet kezdünk kiépíteni. Az egyik a szemponttartás, vagyis az, hogy a feltételt a feladat egészében szem előtt tudják tartani. A másik pedig az, hogy alkotásaikat folyamatosan ellenőrizzék: nem alkottak-e már ugyanilyet, különbözik-e a készülő új elem a többitől. A feladatvégzés által fejlődik tovább, hogy megpróbálhatnak minél többfélét létrehozni az adott feltétel szerint, végül a teljességre való törekvés hangsúlyos.

A középiskolában az iskolai tantervek és az érettségi vizsgakövetelmények sokkal nagyobb hangsúlyt helyeznek a valószínűség témakörre, mint korábban. Ehhez igazodva a téma sokkal körültekintőbb előkészítő munkát igényel az alsóbb évfolyamokon is. Nagy különbség van azonban a *valószínűségi szemlélet fejlesztése*, és a *valószínűség számítása* között. Az elméleti számítások élesen elválnak a kísérletek során szerzett tapasztalatoktól. Az utóbbit inkább a gyerekek érzéseire hagyatkozva, de egyre tudatosabban, más körülményeket is megvizsgálva végezzük. Kiemelt jelentőséget kap az adatok lejegyzésének egyre tudatosabb volta, mely nélkülözhetetlen a statisztika témájának mélyebb megértéséhez. Kezdetben az a valószínűség tartalma, hogy ami ténylegesen gyakrabban előfordult, az valószínűbb. Csak egy következő szakaszban módosul ez úgy, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb (még akkor is, ha a tényleges kísérleti adatok ezt nem támasztják alá). Ennek megfelelően a tantervi fejlesztési feladatok és az értékelés formái is tapasztalatszerzésre alapoznak: A „biztos”, „nem biztos”, „valószínű”, „lehetséges” fogalmak kialakítása játékkal, tevékenységgel, hétköznapi példák gyűjtésével célravezető.

Összegzés és további feladatok

A matematika részletes tartalmi keretei csak kiindulópontot jelentenek a diagnosztikus mérési rendszer kidolgozásához. Egy hosszú fejlődési folyamat kezdő szakaszáról van szó, melynek során elkészítettük a mérési koncepciót, összegeztük a rendelkezésre álló tudományos eredményeket, és részletesen leírtuk a mérés eszközrendszerének kidolgozásához felhasználható tartalmakat.

Az elméleti háttér és a részletes tartalmi keretek továbbfejlesztésének többféle forrása lehet. A munka időbeli keretei által szabott korlátok miatt nem kerülhetett sor a külső szakmai vitára. Most e kötetekben megje-

lennek magyarul és angolul, és így a legszélesebb tudományos és szakmai közösségek számára hozzáférhetővé válnak. A továbbfejlesztés első fázisában e szakmai körből érkező visszajelzések feldolgozására és felhasználására kerülhet sor.

A fejlesztés második, lényegében folyamatos szakasza az új tudományos eredmények beépítésével valósulhat meg. Néhány területen különösen gyors a haladás, ezek közé tartozik a kora gyermekkori tanulás és fejlődés kutatása. A tudás, a képességek, a kompetenciák értelmezése, operacionalizálása szintén számos kutatási programban megjelenik. Hasonlóan élénk munka folyik a formatív és diagnosztikus értékelés terén. E kutatások eredményeit fel lehet használni az elméleti háttér újragondolásához és a részletes leírások finomításához.

A tartalmi keretek fejlesztésének legfontosabb forrása alkalmazásuk gyakorlata lesz. A diagnosztikus rendszer folyamatosan termeli az adatokat, amelyeket fel lehet használni az elméleti keretek vizsgálatára is. A most kidolgozott rendszer a mai tudásunkra épül, a tartalom elrendezése és a hozzávetőleges életkori hozzárendelés tudományelméleti értelemben csak hipotézisnek tekinthető. A mérési adatok fogják megmutatni, melyik életkorban *mit tudnak* a tanulók, és csak további kísérletekkel lehet választ kapni arra a kérdésre, hogy hatékonyabb tanulás szervezéssel *meddig lehet eljuttatni* őket.

A különböző feladatok közötti kapcsolatok elemzése megmutatja a fejlődés leírására szolgáló skálák összefüggéseit is. Rövid távon elemezni lehet, melyek azok a feladatok, amelyek az egyes skálák egyedi jellegét meghatározzák, és melyek azok, amelyek több dimenzióhoz is tartozhatnak. A diagnosztikus mérésekből származó adatok igazán fontos elemzési lehetőségei azonban az eredmények longitudinális összekapcsolásában rejlenek. Így hosszabb távon elemezni lehet azt is, milyen az egyes feladatok diagnosztikus ereje, melyek azok a területek, amelyek tudása meghatározza a későbbi tanulás eredményeit.

Irodalom

- Anderson, L. W. és Krathwohl, D. R. (2001): *A taxonomy for learning, teaching and assessing*. Longman, New York.
- Artelt, C., Baumert, J., Julius-Mc-Elvany, N. és Peschar, J. (2003): *Learners for life. Student approaches to learning*. OECD, Paris.

- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. és Wiliam, D. (2003): *Assessment for learning. Putting it into practice*. Open University Press, Berkshire.
- Ainsworth, L. (2003): *Power standards. Identifying the standards that matter the most*. Advanced Learning Press, Englewood, CA.
- Ainsworth, L. és Viegut, D. (2006): *Common formative assessments. How to connect standards-based instruction and assessment*. Corwin Press, Thousand Oaks, CA.
- Bán Sándor (2002): *Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás*. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 231–260.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. és Krathwohl, D. R. (1956): *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals*. Handbook. Cognitive Domain. Longmans, New York.
- Carroll, J. B. (1993): *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Carroll, J. B. (1998): *Matematikai képességek: A faktoranalitikus módszer néhány eredménye*. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest, 15–37.
- Clarke, S. (2001): *Unlocking formative assessment. Practical strategies for enhancing pupils learning in primary classroom*. Hodder Arnold, London.
- Clarke, S. (2005): *Formative assessment in action. Weaving the elements together*. Hodder Murray, London.
- Csapó Benő (1998): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő (2002): *Az új tudás képződésének eszközei: az induktív gondolkodás*. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 261–290.
- Csapó, B. (2004): *Knowledge and competencies*. In: Letschert, J. (szerk.): *The integrated person. How curriculum development relates to new competencies*. CIDREE, Enschede. 35–49.
- Csapó Benő (2008): *A tanulás dimenziói és a tudás szerveződése*. *Educatio*, 2. sz. 207–217.
- Csapó, B. (2010): *Goals of learning and the organization of knowledge*. In: Klieme, E., Leutner, D. és Kenk, M. (szerk.): *Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes*. 56. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Beltz, Weinheim, 12–27.
- Csikós, C., Kelemen, R. és Verschaffel, L. (2011): *Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study*. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s11858-011-0308-7
- Dehaene, S. (1994): *Number sense: How the mind creates smathematics*. Oxford University Press, New York.
- Dobi János (2002): *Megtanult és megértett matematikatudás*. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 177–199.
- Hartig, J., Klieme, E. és Rauch, D. (2008, szerk.): *Assessment of competencies in educational context*. Hogrefe, Göttingen.
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H. E. és Vollmer, H. J. (2003): *Zur Entwicklung*

- nationaler Bildungsstandards*. Bundesministerium für Bildung und Forschung, Berlin.
- Kontra József (1999): A gondolkodás flexibilitása és a matematikai teljesítmény. *Magyar Pedagógia*, **99**. 141–155.
- Leighton, J. P. és Gierl, M. J. (2007, szerk.): *Cognitive diagnostic assessment for education. Theory and applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Marzano, R. J. és Haystead, M. W. (2008): *Making standards useful in the classroom*. Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria.
- Marzano R. J. és Kendall, J. S. (2007): *The new taxonomy of educational objectives*. 2nd ed. Corwin Press, Thousand Oaks, CA.
- Nagy József (1980): *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Nagy József (1990): *A rendszerezési képesség kialakulása*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004): *DIFER Programcsomag: Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer 4-8 évesek számára*. Mozaik Kiadó, Szeged.
- O'Neill, K. és Stansbury, K. (2000): *Developing a standards-based assessment system*. WestEd, San Francisco.
- OECD (2004): *Problem solving for tomorrow's world. First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003*. OECD, Paris.
- OECD (2006): *Assessing scientific, mathematical and reading literacy. A framework for PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science*. OECD, Paris.
- OECD (2009): *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science*. OECD, Paris.
- Opfer, J. E. és Siegler, R. S. (2007): *Representational change and children's numerical estimation*. *Cognitive Psychology*, **55**. 169–195.
- Pólya György (1945,1957): *A gondolkodás iskolája*. Bibliotheca, Budapest.
- Pólya György (1962): *Mathematical Discovery. On understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. John Wiley and Sons. (Magyarul: *A problémamegoldás iskolája*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985)
- National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.
- Rényi Alfréd (2005): *Ars Mathematica*. Typotex Kiadó, Budapest.
- Robitaille, D. F. és Garden, R. A. (1989): *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. Pergamon Press, Oxford.
- Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat Kiadó, Budapest
- Snow, C. E. és Van Hemel, S. B. (szerk.) (2008): *Early childhood assessment*. The National Academies Press, Washington DC.
- Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknak és érdeklődőknek*. Typotex Kiadó, Budapest.
- Vidákovich Tibor (2002): *Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása*. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 201–230.