



TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette:

Csapó Benő és Szendrei Mária

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ



Tartalmi keretek
a matematika diagnosztikus értékeléséhez

**TARTALMI KERETEK
A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS
ÉRTÉKELÉSÉHEZ**

Szerkesztette

Csapó Benő

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet
és

Szendrei Mária

Szegedi Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszék

Nemzeti Tankönyvkiadó
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projekt azonosító: TÁMOP 3.1.9-08/1-2009-0001

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszachenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Szerzők:

Csapó Benő, Csikos Csaba, Gábris Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária,
Szitányi Judit, Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:

Kosztolányi József és Vancsó Ödön

ISBN 978-963-19-7211-5

© Csapó Benő, Csikos Csaba, Gábris Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária, Sitányi Judit,
Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest 2011

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu • Vevőszolgálat: info@ntk.hu • Telefon: 06-80-200-788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 42686 • Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Felelős szerkesztő: Szilágyi Edit • Műszaki szerkesztő: Dobó Nándor
Terjedelem: 29,67 (A/5) ív • Első kiadás, 2011

Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni.

Semmilyen emberi vizsgálódást nem nevezhetünk igaz tudománynak, ha azt nem lehet a matematika nyelvén kifejezni.

Leonardo da Vinci

Tartalom

Bevezetés (<i>Csapó Benő és Szendrei Mária</i>)	9
1. <i>Terezinha Nunes és Csapó Benő</i> : A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése	17
2. <i>Csíkos Csaba és Lieven Verschaffel</i> : A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása	59
3. <i>Szendrei Julianna és Szendrei Mária</i> : A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai	99
4. <i>Csíkos Csaba és Csapó Benő</i> : A diagnosztikus matematika felmérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések	141
5. <i>Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné, Makara Ágnes, Szendrei Julianna, Szitányi Judit és Zsinkó Erzsébet</i> : Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus rtékeléséhez	169
A kötet szerzői	329

Bevezetés

A matematika, amint arra a kötet mottójául választott *Leonardo*-idézet utal, különleges szerepet játszik a tudományok fejlődésében. Hasonlóan kiemelt jelentősége van az iskolai oktatásban is. A legrégebbi tudomány, melynek korai eredményei ma is iskolai tananyagként számítanak. Az egyik legkorábban tantárggyá szerveződött tudásterület, amelyet ma is általában a legmagasabb óraszámokban tanítanak. A magyar közoktatásban a matematika az egyetlen olyan iskolai tantárgy, amely mind a tizenkét évfolyamon végighalad. Tanításának előkészítése már az iskolába lépés előtt elkezdődik, és a természettudományi, valamint műszaki szakok mindegyikén, továbbá a társadalomtudományi szakok jelentős részén a felsőoktatásban is alaptantárgy.

A matematika tanulása a kezdetek óta összefonódik a gondolkodás fejlesztésével, az absztrakciós képesség és a logikus gondolkodás elsajátításával. A matematika jelen van a hétköznapi élet problémáinak megoldásában, és a matematikatudás alkalmazása számos munkakörben elengedhetetlen feltétel. E kitüntetett szerepe indokolja, hogy a matematika a nagy nemzetközi összehasonlító felmérések egyik állandó mérési területe, melyek eredményeit figyelembe veszik az országok fejlődési potenciáljának becslésénél. Magyarországon a szövegértés mellett matematikából kerül sor az évenkénti teljes körű felmérésekre, és természetes módon került be az olvasás és a természettudomány mellett a diagnosztikus mérési rendszer kidolgozására irányuló projektbe.

Az ezredforduló körüli évtizedekben számos olyan kutatási eredmény született, amely integrálva és a gyakorlatba átültetve fordulatot hozhat az iskolai oktatás eredményességének javulásában. Az a program, amelynek kertében ez a kötet létrejött, három jelentősebb kutatási tendencia metszetében helyezkedik el.

A pedagógiai rendszerek fejlődésének egyik kulcsa, hogy különböző szintű szabályozási köreikben mind gyakoribb, pontosabb és részletesebb visszacsatoló mechanizmusok jelennek meg. Ezen a téren az elmúlt évtizedek leglátványosabb változását a nagy nemzetközi felmérések rendszeressé válása hozta. A nemzetközi összehasonlító adatok lehetővé teszik az oktatás rendszerszintű sajátosságainak megismerését, és az egymást követő felmérések eredményei visszajelzést adnak az esetleges beavatko-

zások hatásairól is. A nemzetközi értékelési programok mérésmethodikai megoldásai segítették a nemzeti értékelési rendszerek kialakítását, és sok országban, köztük Magyarországon is megvalósult az elsősorban intézményi szintű visszajelzéseket szolgáltatató évenkénti felmérés. Az intézmények saját felmérési adataik elemzése révén javíthatják belső folyamataikat, munkájukat, az eredmények nyilvánosságra hozatala pedig ösztönzést jelenthet a fejlődés lehetőségeinek keresésére. Ugyanakkor az ilyen jellegű rendszereket már hosszabb ideje működtető országok gyakorlata azt is megmutatta, hogy az ily módon az iskolákra gyakorolt nyomás csak egy bizonyos mértékig javítja az eredményeket, a túl erős késztetés különböző torzulásokhoz vezethet. A pedagógusok munkáját közvetlenül segítő módszerek és eszközök nélkül nem lehet a teljesítményeket tovább javítani. Ezen a téren az értékelés fejlődésének következő fázisát a gyakoribb, részletesebb, tanulói szintű visszajelzésekre alkalmas rendszerek kidolgozása jelenti.

A hagyományos, papír alapú tesztek révén nem lehet a tanulók felmérését kellő gyakorisággal elvégezni. Így nem valósulhatott meg a pedagógusok ellátása olyan mérőeszközökkel, amelyek közvetlenül a tanulást segítik azáltal, hogy követik a tanulók fejlődését, időben jelzik az esetleges lemaradásokat. Ezért másodikként az új információs és kommunikációs technológiák robbanásszerű fejlődését említjük, melyek az élet minden területén újszerű megoldásokat kínálnak. Alkalmazásukkal az oktatásban is kényelmesen megoldhatóvá válnak korábban megvalósíthatatlan feladatok. Ez utóbbiak közé tartozik a gyakori diagnosztikus visszajelzést biztosító pedagógiai értékelés. A számítógépek oktatási alkalmazása gyakorlatilag az első nagyméretű elektronikus számítógépek megjelenésével megkezdődött, már évtizedekkel ezelőtt is születtek számítógépes oktatóprogramok. Az informatikai eszközök iskolai alkalmazása azonban gyakran a technológia felől indult el, azzal a logikával, hogy ha már adott a lehetőség, alkalmazzuk azt a tanításban. Az online diagnosztikus értékelés a másik oldalról jutott el az informatika alkalmazásához, amikor egy alapvető jelentőségű pedagógiai feladat megvalósításához kerestük az eszközt. Itt az információs-kommunikációs technológia valóban egy mással nem pótolható eleme a rendszernek, amely kiterjeszti a pedagógiai értékelés lehetőségeit.

A harmadik, és e kötet tárgyához legközelebb álló fejlemény a pszichológia kognitív forradalma, amely folyamat a múlt század végén számos

területre kihatott, és új lendületet adott az iskolai tanulás és tanítás kutatásának is. Új, a korábbinál differenciáltabb tudáskonceptiók kialakulásához vezetett, amely lehetővé tette az iskolai oktatás céljainak pontosabb meghatározását, tudományosan megalapozott standardok, követelmények kidolgozását. Ez a folyamat megnyitotta az utat a tanulók fejlődési folyamatainak részletesebb feltérképezése előtt is.

A kora gyermekkor meghatározó szerepének felismerése nyomán a figyelem középpontjába került az iskola kezdő szakasza, különösképpen a nyelvi fejlődés segítése és a gondolkodási képességek fejlesztése. Számos vizsgálat bizonyította, hogy az alapvető készségek elsajátítása nélkül a tanulók nem képesek a tananyag mélyebb megértésére, ennek hiányában pedig legfeljebb csak változatlan formában tudják reprodukálni a tananyagot, de nem képesek azt új helyzetekben alkalmazni. A megfelelő alapok kialakítása nélkül a későbbi tanulásban súlyos nehézségek jelentkeznek, az első iskolai években elszenvedett kudarc pedig egész életre meghatározza a tanuláshoz való viszonyt.

A matematika tantárgy kiemelkedő szerepet játszik a gondolkodási képességek fejlesztésében. Más tantárgyakhoz képest viszonylag kevés külső előismeretet feltételez, így már nagyon korán, kisgyermekkorban is elkezdhető a fejlesztés. A matematika tanulása lehetőséget ad arra, hogy a tanulók felismerjenek szabályszerűségeket, mérlegeljék a lehetőségeket, modelleket állítsanak fel. A matematikában korán fel lehet hívni a tanulók figyelmét arra, hogy kételkedjenek a vélt igazságban (sejtésben), keressék az okokat és a bizonyítékokat. A matematika egyedülálló lehetőségeket kínál a bizonyítás jelentőségének megértésére. Ma a strukturálatlan információk, adatok óriási tömege áll rendelkezésünkre. A matematika fejlesztheti az adatok és információk csoportosításának és megfelelő következtetések levonásának készségeit. Felértékelődik az összefüggések felismerésének, a kapcsolatok bizonyításának képessége, melyre az oktatásnak is figyelmet kell fordítania. A tudomány és technika óriási ütemben fejlődik, a tényszerű ismereteket az idő felülírhatja. A gondolkodási és probléma-megoldási képesség azonban nem avul el, és az élet egyre több területén jut szerephez. A matematika oktatásának már az első évfolyamtól kezdve fontos, később nem pótolható feladata a gondolkodási, probléma-megoldási képesség fejlesztése.

Az említett folyamatokkal összhangban indította el a Szegedi Tudományegyetem Oktatásméleti Kutatócsoportja a „Diagnosztikus mérések

fejlesztése” c. projektet. Ennek keretében az olvasás-szövegértés, a matematika és a természettudomány terén került sor a diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek részletes kidolgozására, melyekből e kötet a matematikához kapcsolódó munka eredményeit mutatja be. Ezekre épül az első hat évet lefedő, több száz feladatot tartalmazó feladatbank elkészítése, amely egy online tesztelésre alkalmas számítógépes rendszer részét képezi. Egy ilyen rendszer – melynek teljes kiépítése sok egymásra épülő lépésből álló hosszú folyamat – alkalmas lesz arra, hogy rendszeres és gyakori tanulói szintű visszajelzéseket szolgáltatson a tudás változásának különböző dimenzióiról.

A diagnosztikus tesztek mindenekelőtt azt elemzik, hol tart az egyes tanulók fejlődése bizonyos viszonyítási pontokhoz képest. Miként a rendszerszintű vizsgálatoknál, itt is természetes viszonyítási alap lehet a populáció átlaga: fontos információ, hogy hol tart a tanuló hasonló helyzetű társaihoz képest. Az online diagnosztikus tesztek azonban ennél többet nyújtanak: a rendszer nyilvántartja a tanulók eredményeit, így követni lehet a tanulók fejlődését, tudásuk időbeli változását is.

A mérőeszközök a tudományos alapossággal kifejlesztett tartalmi keretekre épülnek, amit három párhuzamos szerkezetű kötet foglal össze. Ez a kötet a matematika felmérésének tartalmi kereteit tartalmazza, két hasonló mű az olvasás és a természettudomány területén végzett munkáról számol be. A három területen párhuzamosan folyt a fejlesztő munka, ugyanazt a tágabb elméleti koncepciót, azonos fogalmi rendszert alkalmazva került sor a mérések részletes tartalmának meghatározására. A kötetek közös szerkezetén túl e bevezető és a negyedik fejezet is tartalmaz mindhárom területen megjelenő közös részeket.

Az itt bemutatásra kerülő fejlesztő munka épít a Szegedi Tudományegyetemen a pedagógiai értékelés terén folyó több évtizedes kutatómunka tapasztalataira, az MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport eredményeire, mindenekelőtt a tudás szerkezetével, szerveződésével kapcsolatos vizsgálatokra, a pedagógiai értékelés, a méréselmélet, a fogalmi fejlődés, a gondolkodási képességek fejlődése, a problémamegoldás, az iskolakészültség-felmérések eredményeire, továbbá a feladatírás, teszt-szerkesztés, tesztfejlesztés terén kialakított technológiákra. Ugyanakkor a diagnosztikus mérések megalapozása olyan komplex feladat, amelynek megoldásához széles körű tudományos összefogásra van szükség. Ennek megfelelően a tartalmi keretek kidolgozása hazai és nemzetközi együtt-

működésben valósult meg, melyben részt vesznek a felmért területek kutatói is. Az egyes kötetek elméleti fejezeteinek megírásában társzerzőként közreműködnek az adott kérdések kiemelkedő specialistái, ezáltal a nemzetközi szinten elérhető legkiérleltebb tudományos tudásra építhetünk. A tartalmi keretek részleteit tantervfejlesztésben, feladatírásban jártas kutatók és gyakorlati szakemberek, pedagógusok dolgozták ki.

A tartalmi keretek elkészítése egy háromdimenziós tudáskonceptióra épül, követve azt a hagyományt, amely végigvonul a szervezett iskolázás történetén. Régi törekvés az értelem kiművelése, a gondolkodás, az általános képességek fejlesztése. A modern iskolai oktatás is számos olyan célt tűz ki, amely magára a tanuló személyre vonatkozik. E célok megvalósításában mindenekelőtt az emberrel, a fejlődő gyermekkel foglalkozó tudományok eredményei igazítanak el bennünket. A fejlődéslélektan, a tanulásra vonatkozó pszichológiai eredmények, illetve újabban az agykutatás, a kognitív idegtudomány eredményei lehetnek e dimenzió forrásai. A matematika területén ennek a dimenzióknak a lényege a matematikai gondolkodás, a matematikai képességek fejlesztése.

A célok egy másik köre az iskolában tanultak hasznosságával kapcsolatos: a „nem az iskolának tanulunk” figyelmeztetés ma talán aktuálisabb, mint korábban bármikor, hiszen a modern társadalmi környezet sokkal gyorsabban változik, mint amit az iskola követni tud. A korábbi kutatások eredményeiből tudjuk, hogy a transzfer, a tudás átvitele új területekre nem automatikus; megfelelő tanítási módszerekre van szükség az alkalmazás készségeinek fejlesztéséhez. Elengedhetetlen tehát, hogy egy diagnosztikus értékelés tartalmi kereteiben önállóan megjelenjenek a tudás alkalmazásának kérdései. Ez egy másik szempontú célrendszert jelent, annak meghatározását, mit várunk el a tanulóktól, hogy tudásukat az iskolai tanulás más területein vagy az iskolán kívül alkalmazni tudják.

Harmadsorban, fontosak azok a tartalmak, amelyeket az iskolák a tudományok és a művészetek által felhalmozott tudásból közvetítenek. Nem csupán azért, mert ezek nélkül az előző célokat sem lehet megvalósítani, hanem azért, mert önmagában is fontos, hogy a tanulók megismerjék a kultúra adott területét, a matematika, a természettudományok által létrehozott, és az adott tudomány belső értékei szerint szerveződő tudást. A matematika nemcsak a gondolkodás fejlesztésének és a gyakorlati problémák megoldásának eszköze, hanem önálló tudományos diszciplína, amelynek belső logikáját, tudásanyagát, a tudományág rendezőelveit

és felépítését érvényesítő formában is el kell sajátítaniuk a tanulóknak. Bár az első iskolai években a tanulók fejlődési sajátosságai és a képességfejlesztés szempontjai kerülnek előtérbe, sem az értelmi képességek fejlesztése, sem a gyakorlati problémák megoldására való felkészítés nem lehet eredményes a tudományos tudás értő elsajátítása nélkül.

Az utóbbi évtizedekben ezek a célok egymással versengve jelentek meg, hol egyik, hol másik vált divatossá, dominánssá, háttérbe szorítva másokat. E projekt keretében feltételezzük, hogy az oktatás e célokat egymással integrálva valósítja meg, ugyanakkor a diagnosztikus értékelésnek ezeket differenciáltan kell kezelnie. A felméréseknek konkrétan meg kell mutatniuk, ha egyik vagy másik dimenzióban lemaradás tapasztalható.

A kötet első három fejezete az előzőekben említett három dimenzió elméleti hátterét, kutatási eredményeit összegzi. Az első fejezetben *Terezinha Nunes* és *Csapó Benő* a matematikai gondolkodás fejlődésének, fejlesztésének és felmérésének pszichológiai kérdéseit tekinti át. Ez a fejezet mutatja be a számokkal, mennyiségekkel való gondolkodás fejlődésének természetes folyamatát, melyet az eredményes matematikatanítás stimulálhat, felgyorsíthat. A második fejezetben *Csikos Csaba* és *Lieven Verschaffel* a matematikai tudás alkalmazásával és a matematikai műveltséggel kapcsolatos kutatási eredményeket foglalja össze. A harmadik fejezet – *Szendrei Julianna* és *Szendrei Mária* munkája – azt vázolja fel, hogyan szerveződik a matematika mint tudományos diszciplína, mi tanítható, és általában mit tanítanak ebből az iskolában, továbbá milyen tartalmakat kínál a matematikai gondolkodás fejlesztése és a gyakorlati alkalmazások számára. Mindegyik tanulmány gazdag szakirodalmi háttérre épül, és részletes irodalomjegyzékük segítheti a későbbi fejlesztő munkát is. A negyedik fejezetben *Csikos Csaba* és *Csapó Benő* a tartalmi keretek kidolgozásának elméleti kérdéseit és gyakorlati megoldásait tekinti át, továbbá bemutatja a diagnosztikus mérések részletes tartalmainak kidolgozása során követett alapelveket. Ez a fejezet teremt kapcsolatot az elméleti fejezetek és a részletes tartalmi leírások között.

A leghosszabb, a kötet terjedelmének felét kitevő ötödik fejezet tartalmazza a diagnosztikus értékelés részletes tartalmi kereteit. Ennek a fejezetnek az a funkciója, hogy megalapozza a mérőeszközök kidolgozását, a feladatok elkészítését. A mérés tartalmait az említett három dimenzió szerint csoportosítja. A diagnosztikus értékelés tekintetében az iskola

első hat évfolyamát egy egységes fejlesztési folyamatnak tekintjük. Ennek megfelelően a mérési eredmények a hat évfolyamot átfogó skálákon helyezik el a tanulókat aktuális fejlettségi szintjük alapján. Így lényegében a feladatok tartalmainak leírása is egyetlen folyamatos egységet alkothatna. Az áttekinthetőség és az oktatási standardok leírásának hagyományait követve azonban a folyamatot három, egyenként két évet átfogó szintre bontottuk. Így mutatjuk be a három dimenzió mentén az összesen kilenc tartalmi blokkot, melyek mindegyike négy fő matematikai területet tartalmaz.

A tartalmi kereteknek azt a formáját, amelyet ebben a kötetben összefoglaltunk, egy hosszabb fejlesztési folyamat kezdő lépésének tekinthetjük. Meghatároztuk, hogy a ma rendelkezésre álló tudás alapján mit célszerű mérni, melyek a felmérések fő dimenziói. Az áttekintett területeken azonban nagyon gyors a fejlődés, ezért a későbbiekben időről időre integrálni kell az új tudományos eredményeket. A feladatbank kidolgozásában szerzett tapasztalatok, majd később a diagnosztikus rendszer működése révén keletkező adatok elemzése lehetőséget nyújt a tartalmi leírások folyamatos finomítására. A feladatok bemérése, majd az adatok összefüggéseinek elemzése nyomán az elméleti modelleket is újraértékeljük. Néhány év múlva azt is elemezni lehet, hogy a korai fejlődés egyes területei milyen összefüggésben állnak a későbbi teljesítményekkel, így mód lesz a feladatok prediktív és diagnosztikus validitásának meghatározására, ami szintén fontos forrása lehet az elméleti keretek továbbfejlesztésének.

A kötet elkészítésében meghatározó szerepet játszott *Csikos Csaba*, aki azon túl, hogy társszerzőként részt vett három fejezet megírásában, irányította a részletes tartalmi kereteket kidolgozó munkacsoport tevékenységét is. A munkában a szerzőkön kívül számos további munkatársunk működött közre, akiknek ezúton is köszönetet mondunk. Külön is köszönjük a projektet irányító és szervező team, *Molnár Katalin*, *Kléner Judit* és *Túri Diána* munkáját. A tartalom kidolgozásához és végső formába öntéséhez sok segítséget kaptunk szakmai lektorainktól. Ezúton is köszönjük *Kosztolányi József* és *Vancsó Ödön* értékes kritikai észrevételeit és javaslatait.

Csapó Benő és Szendrei Mária