Краткое сообщение

О логарифмической вогнутости рядов по отношениям гамма функций

С.И. Калмыков, Д.Б. Карп

Аннотация. В работе найдены оценки для определителя Турана, составленного из рядов по отношениям гамма функций. Такие ряды рассматриваются нами как функции от одновременного сдвига аргументов гамма функций в числителе и знаменателе. Показана также неотрицательность степенных коэффициентов определителя Турана. В качестве следствий приведены новые неравенства для гипергеометрической функции Гаусса, неполной бета функции и обобщенного гипергеометрического ряда. Сообщение является продолжением исследований ряда авторов, изучавших логарифмическую выпуклость и логарифмическую вогнутость гипергеометрических функций по параметрам. Библ. – 10 назв.

Ключевые слова: гамма функция, неравенство Турана, логарифмическая вогнутость, обобщенные гипергеометрические функции

УДК: 517.588

Abstract. We find estimates for the Turan determinant formed by series in gamma ratios. We view such series as functions of simultaneous shifts of the arguments of the gamma functions in numerator and denominator. We also demonstrate that the power series coefficients of such Turanians are non-negative. These results are then applied to derive new inequalities for the Gauss hypergeometric function, the incomplete Beta function and the generalized hypergeometric series. This note continues the research of various authors who investigated logarithmic convexity and concavity of hypergeometric functions in parameters. Bibl. - 10 references.

Keywords: Gamma function, Turan inequality, log-concavity, generalized hypergeometric functions

В данной заметке мы рассмотрим класс степенных рядов вида

$$g_{a,c}(\mu;x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)}x^n, \tag{1}$$

где $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ - некоторая неотрицательная числовая последовательность, $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Основным вопросом будет поиск условий на последовательность $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ и числа a, c, при выполнении которых разность произведений

$$\psi_{a,c}(\mu,\nu;x)=g_{a,c}(\mu;x)g_{a,c}(\nu;x)-g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(\mu+\nu;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m x^m \tag{2}$$

имеет неотрицательные коэффициенты ψ_m при всех степенях x. Очевидным следствием такой неотрицательности, является логарифмическая вогнутость функции $\mu\to g_{a,c}(\mu;x)$. Все ряды здесь понимаются как формальные, вопросы сходимости не рассматриваются. Важнейшими примерами рядов вида (1) являются гипергеометрические ряды и их производные по параметрам. Результаты данной заметки также будут проиллюстрированы следующими из них новыми неравенствами для гипергеометрических функций. Области сходимости встречающихся при этом рядов будут обычно очевидны. Аналогичные обсуждаемым здесь вопросы для степенных рядов отличных от (1) изучались нами в [1, 2, 3, 4].

Для формулировки результатов нам понадобятся следующие стандартные определения.

Определение 1. Неотрицательная последовательность $\{f_k\}$ называется логарифмически вогнутой, если ее элементы удовлетворяют условию $f_k^2\geq f_{k-1}f_{k+1}$, $k=1,2,3....$ Говорят, что у нее нет внутренних нулей, если $f_N=0$ влечет за собой $f_k=0$ либо для всех $0\leq k\leq N$, либо для всех $k\geq N$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется абсолютно монотонной на интервале (a,b) (возможно неограниченном), если $f^{(k)}(x)\geq 0$ для всех $k=0,1,\dots$ и $x\in(a,b)$. Она называется вполне монотонной, если для этих же значений k и x выполнены неравенства $(-1)^k f^{(k)}(x)\geq 0$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется мультипликативно выпуклой на интервале $(0,\infty)$, если она удовлетворяет условию
$$f(x^\lambda y^{1-\lambda}) \le f^\lambda(x) f^{1-\lambda}(y)$$
при $\lambda \in [0,1]$ и $x,y>0$.

В работе [4] нами была доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(а) $c+1 \ge a \ge c > 0$ *и* $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ *- произвольная неотрицательная последовательность; или*
(б) $a > c+1 > 1$ *и* $\{g_n n!\}_{n=0}^\infty$ *- неотрицательная лог-вогнутая последовательность без внутренних нулей.*

Тогда $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x) \ge 0$ *при всех* $x,\mu \ge 0$ *и* $\nu \in \mathbb{N}$. *Если к тому же* $\mu \ge \nu - 1$, *то коэффициенты Тейлора функции* $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x)$ *неотрицательны,* $\psi_m \ge 0$, *для всех* $m = 0,1,\ldots$ *откуда следует, что функция* $x \to \psi_{a,c}(\mu,\nu;x)$ *абсолютно монотонна и мультипликативно выпукла на* $(0,\infty)$.

Цель настоящей заметки – усилить часть (б) теоремы 1, заменив $g_n n!$ на g_n, и применить указанное усиление для вывода новых неравенств для гипергеометрических функций. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим* $a > c+1 > 1$ *и* $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ *- неотрицательная лог-вогнутая последовательность без внутренних нулей. Тогда* $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x) \ge 0$ *при всех* $x,\mu \ge 0$ *и* $\nu \in \mathbb{N}$. *Если к тому же* $\mu \ge \nu - 1$, *то коэффициенты Тейлора функции* $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x)$ *неотрицательны,* $\psi_m \ge 0$, *для всех* $m = 0,1,\ldots$ *откуда следует, что функция* $x \to \psi_{a,c}(\mu,\nu;x)$ *абсолютно монотонна и мультипликативно выпукла на* $(0,\infty)$.

Схема доказательства. Согласно леммам 2 и 3 работы [4] достаточно доказать теорему для $\nu = 1$. При этом значении ν непосредственным вычислением после несложных преобразований получим

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{m} g_k g_{m-k} \left[\frac{\Gamma(a+1)(a+1)_k \Gamma(a+\mu)(a+\mu)_{m-k}}{\Gamma(c+1)(c+1)_k \Gamma(c+\mu)(c+\mu)_{m-k}} - \frac{\Gamma(a)(a)_k \Gamma(a+\mu+1)(a+\mu+1)_{m-k}}{\Gamma(c)(c)_k \Gamma(c+\mu+1)(c+\mu+1)_{m-k}} \right]$$

$$= \frac{(a-c)\Gamma(a)\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+1)\Gamma(c+\mu+1)} \sum_{k=0}^{[m/2]} g_k g_{m-k} M_k, \quad \text{где } (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \text{ - сдвинутый факториал, а}$$

$$M_k = \frac{(a)_k (a+\mu)_{m-k}}{(c+1)_k (c+1+\mu)_{m-k}} (m-2k+\mu) - \frac{(a)_{m-k}(a+\mu)_k}{(c+1)_{m-k}(c+1+\mu)_k}(m-2k-\mu)$$
при $k < m/2$ и
$$M_k = \frac{\mu (a)_k (a+\mu)_{m-k}}{(c+1)_k (c+1+\mu)_{m-k}}$$
при $k = m/2$. Согласно лемме 6 работы [4] для доказательства неотрицательности коэффициентов ψ_m достаточно показать, что
$$\sum_{0 \le k \le m/2} M_k \ge 0 \tag{3}$$
и последовательность $M_0, M_1, \ldots, M_{[m/2]}$ меняет знак не более одного раза, то есть имеет структуру $(- - \cdots - -00\cdots 00 + + \cdots + +)$, где нули и знаки минус могут отсутствовать.

Неотрицательность суммы составляет утверждение следующей леммы.

Лемма 1. *Неравенство*
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(a)_k (a+\mu)_{m-k}}{(b)_k (b+\mu)_{m-k}} (m-2k+\mu) \ge 0, \tag{4}$$
верно для всех целых $m \ge 1$ *и всех* $\mu \ge 0$, *если* $b \ge a \ge 0$ *или* $a \ge b \ge 1$.

Доказательство леммы 1. Введем обозначение $u_k = (a)_k(a+\mu)_{m-k}/[(b)_k(b+\mu)_{m-k}]$. Если $a = b$ или $a = 0$, то утверждение очевидно. При $b > a > 0$ функция $x \to (a+x)/(b+x)$ возрастает, откуда следует, что $u_k > u_{m-k}$ для всех $k < m-k$. Остается заметить, что в этом случае

$$u_k(m-2k+\mu) + u_{m-k}(2k-m+\mu) = (m-2k)(u_k - u_{m-k}) + \mu(u_k + u_{m-k}) > 0$$

для всех $k \le m-k$. Если $a > b \ge 1$, то при помощи алгоритма Госпера [5], [6, Глава 5] можно найти антиразности для чисел $u_k(m-2k+\mu)$. Результат легко проверить непосредственным вычислением:

$$u_k(m-2k+\mu) = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \text{ где } \alpha_k = \frac{(b-1)(b-1+\mu)(a)_k(a+\mu)_{m+1-k}}{(a-b+1)(b-1)_k(b-1+\mu)_{m+1-k}}, \; k = 0, 1, \ldots, m+1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m} u_k(m-2k+\mu) = \sum_{k=0}^{m}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \alpha_{m+1} - \alpha_0$$
$$= \frac{(b-1)(b-1+\mu)}{(a-b+1)}\left\{\frac{(a)_{m+1}}{(b-1)_{m+1}} - \frac{(a+\mu)_{m+1}}{(b-1+\mu)_{m+1}}\right\} \ge 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $x \to (a+x)/(b-1+x)$ убывает при $x > 0$ в силу условия $a > b \ge 1$. Лемма доказана.

Остается заметить, что левые части неравенств (3) и (4) совпадают, а доказательство одной смены знака у последовательности $M_0, M_1, \ldots, M_{[m/2]}$ дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1, приведенного в [4, Теорема 4]. Мультипликативная выпуклость следует из неотрицательности коэффициентов согласно теореме Харди, Литтлвуда и Пойа [7, Proposition 2.3.3]. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1(a) *или теоремы* 2, *причем* $\nu \in \mathbb{N}$ *и* $\mu \ge \nu - 1$. *Тогда функция* $y \to \psi_{a,c}(\mu, \nu; 1/y)$ *вполне монотонна и логарифмически выпукла на* $(0, \infty)$, *поэтому существует неотрицательная мера* τ *с носителем в* $[0, \infty)$ *такая, что*

$$\psi_{a,c}(\mu, \nu; x) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-t/x} d\tau(t).$$

Доказательство. Согласно [8, Теорема 3] сходящийся ряд вполне монотонных функций – вполне монотонная функция. Отсюда вытекает, что $y \to \psi_{a,c}(\mu, \nu; 1/y)$ – вполне монотонна, поскольку $1/y$ вполне монотонна и коэффициенты неотрицательны по теореме 2. Интегральное представление следует тогда по классической теоремы Бернштейна [9, Теорема 1.4], а логарифмическая выпуклость получается, например, согласно [7, Упражнение 2.1(6)]. $\square$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1(a) *или теоремы* 2. *Тогда для всех* $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \ge \nu - 1$ *и* $x \ge 0$, *справедливо неравенство*

$$g_{a,c}(\mu; x) g_{a,c}(\nu; x) - g_{a,c}(0; x) g_{a,c}(\mu+\nu; x) \ge g_0^2 \left\{\frac{\Gamma(a+\nu)\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\nu)\Gamma(c+\mu)} - \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\mu+\nu)}{\Gamma(c)\Gamma(c+\mu+\nu)}\right\}.$$

Если $a - c, \mu, \nu \ne 0$, *то равенство достигается только в точке* $x = 0$.

Доказательство. Правая часть доказываемого неравенства - это свободный член в разложении функции $\psi_{a,c}(\mu, \nu; x)$ в ряд по степеням x. Неравенство следует тогда из неотрицательности коэффициентов при всех положительных степенях x. $\square$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1(a) *или теоремы* 2. *Тогда*

$$\frac{(a+\mu)_\nu (c)_\nu}{(c+\mu)_\nu (a)_\nu} \le \frac{g_{a,c}(0; x) g_{a,c}(\mu+\nu; x)}{g_{a,c}(\nu; x) g_{a,c}(\mu; x)} \le 1$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \ge 0$ *и* $x \ge 0$.

Доказательство. Оценка сверху эквивалента неравенству $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x)\geq 0$, составляющему часть утверждения теоремы 2. Оценка снизу составляет часть утверждения теоремы 2 из [4] если применить ее к функции $f_{a,c}(\mu;x)=\Gamma(c+\mu)g_{a,c}(\mu;x)/\Gamma(a+\mu)$. $\square$

Комбинируя следствия 2. и 3., получим следующие двусторонние оценки для определителя Турана:

$$g_0^2\frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(c)^2}\left[\frac{(a)_\nu^2}{(c)_\nu^2}-\frac{(a)_{2\nu}}{(c)_{2\nu}}\right]\leq g_{a,c}(\nu;x)^2-g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(2\nu;x)\leq\frac{(c+\nu)_\nu(a)_\nu-(a+\nu)_\nu(c)_\nu}{(a)_\nu(c+\nu)_\nu}g_{a,c}(\nu;x)^2. \quad (5)$$

Эти неравенства справедливы для $\nu\in\mathbb{N}$, $a\geq c>0$ в предположении, что $\{g_n\}_{n\geq 0}$ – неотрицательная последовательность, которая также логарифмически вогнута и не имеет внутренних нулей когда $a>c+1$.

Замечание. Ранее нами была доказана теорема [4, Theorem 1] о свойствах рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n\frac{(a+\mu)_n}{(c+\mu)_n}\frac{x^n}{n!},$$

которые при $c\geq a$ оказываются аналогичными свойствам рядов $g_{a,c}(\mu;x)$ из (1). В связи с этим закономерен вопрос: нельзя ли убрать факториал в приведенном ряде, сохранив его свойства (и усилив таким образом теорему 1 из [4]). Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Непосредственно проверяется, что

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{(a+1)_k(a+\mu)_{2-k}}{(c+1)_k(c+\mu)_{2-k}}-\frac{(a)_k(a+\mu+1)_{2-k}}{(c)_k(c+\mu+1)_{2-k}}\right)<0$$

при $a=1$, $\mu=1/2$, $c=20$. Следовательно, коэффициент при x^2 в разложении разности произведений, аналогичной (2), в данном случае отрицательный. Отрицательны также и коэффициенты при более высоких степенях x.

Пример 1. Важный пример ряда (1) получается если положить $g_n=(b)_n/n!$. В этом случае имеем:

$$g_{a,c}(\mu;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}\frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)}x^n=\frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\mu)}{}_2F_1(a+\mu,b;c+\mu;x),$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция Гаусса [10, Chapter 2]. Легко проверяется, что последовательность $\{(b)_n/n!\}$ логарифмически вогнута тогда и только тогда, когда $b\geq 1$ (отсутствие внутренних нулей очевидно при всех b). Следовательно, если $c+1\geq a\geq c>0$ и $b>0$ или $a>c+1>1$ и $b\geq 1$, то функция $g_{a,c}(\mu;x)$ удовлетворяет неравенствам из следствий 2 и 3, а также неравенству (5). В частности при $\nu=1$ последнее неравенство имеет вид:

$$\frac{a}{c}({}_2F_1(a+1,b;c+1;x))^2-\frac{a+1}{c+1}{}_2F_1(a,b;c;x){}_2F_1(a+2,b;c+2;x)\geq\frac{a-c}{c(c+1)}\geq 0,\quad 0\leq x<1. \quad (6)$$

Заметим, что при $c\geq a$ и $b>0$ функция $g_{a,c}(\mu;x)$ удовлетворяет теореме 3 из [4] и всем ее следствиям.

Пример 2. Нормализованная неполная бета-функция определяется формулой

$$I_x(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

и представляет собой функцию распределения случайной величины, подчиненной закону бета-распределения. Учитывая, что бета-функция в знаменателе равна $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ и делая замену переменной $t=ux$ придем к выражению

$$I_x(a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^a\int_0^1 u^{a-1}(1-ux)^{b-1}du=\frac{\Gamma(a+b)x^a}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{}_2F_1(1-b,a;a+1;x),$$

где было использовано представление Эйлера [10, Theorem 2.2.1]

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}du=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x).$$

Далее, применяя преобразование Эйлера [10, Theorem 2.2.5]

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x), $$

приходим к представлению

$$ I_x(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)x^a}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}(1-x)^b{}_2F_1(a+b,1;a+1;x) = \frac{x^a(1-x)^b}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+1+n)}x^n. $$

Поскольку множитель перед суммой логарифмически нейтрален по параметру a, применением Теорем 3 из [4] и Теорем 1 и 2 настоящей заметки приходим к следующему утверждению: если $0<b\le 1$, то функция $a\to I_x(a,b)$ логарифмически выпукла на $(0,\infty)$ при каждом фиксированном $0<x<1$; если $b>1$, то функция $a\to I_x(a,b)$ удовлетворяет неравенствам из следствий 2 и 3, а также неравенству (5) при каждом фиксированном $0<x<1$. Другим способом можно показать, что во втором случае $a\to I_x(a,b)$ логарифмически вогнута на $(0,\infty)$. Более того, функция $b\to I_x(a,b)$ также логарифмически вогнута на $(0,\infty)$ при каждом $a>0$ и $0<x<1$. Доказательство этих фактов будет дано в другой публикации.

Пример 3. Этот пример дополняет пример 2 из [4]. Рассмотрим дробь Гаусса (см. [10, параграф 2.5]):

$$ r(x) = \frac{{}_2F_1(a+1,b;c+1;x)}{{}_2F_1(a,b;c;x)}. $$

Применим соотношение смежности [10, (2.5.3)]

$$ \frac{a+1}{c+1}{}_2F_1(a+2,b;c+2;x) = \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a+1,b;c+1;x) - \frac{c}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a,b;c;x). $$

Подставив это соотношение в неравенство (6), получим

$$ \frac{a}{c}({}_2F_1(a+1,b;c+1;x))^2 \ge \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a,b;c;x){}_2F_1(a+1,b;c+1;x) - \frac{c({}_2F_1(a,b;c;x))^2}{(c-b+1)x} $$

или, после деления на $({}_2F_1(a,b;c;x))^2$,

$$ \frac{a}{c}r(x)^2 - \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}r(x) + \frac{c}{(c-b+1)x} \ge 0. $$

Решая это неравенство отдельно при $c-b+1<0$ и $c-b+1>0$ и комбинируя результат с неравенствами из примера 2 работы [4], приходим к следующей таблице

	$c+1<b$	$c+1>b$
$c+1\ge a\ge c>0$, $b>0$ или $a>c+1>1$, $b>1$	$r(x)\ge\Lambda_{a,b,c}(x)$	$r(x)\le\Lambda_{a,b,c}(x)$
$c\ge a>0$, $b>0$	$r(x)\le\Lambda_{a,b,c}(x)$	$r(x)\ge\Lambda_{a,b,c}(x)$

где $\Lambda_{a,b,c}(x) = \dfrac{c+(a-b+1)x-\sqrt{(c+(a-b+1)x)^2-4a(c-b+1)x}}{2(a/c)(c-b+1)x}$.

Пример 4. Естественным обобщением примера 1 является функция

$$ g(\mu;x) = \frac{\Gamma(a_1+\mu)}{\Gamma(c_1+\mu)}{}_{q+1}F_q(a_1+\mu,a_2,\dots,a_{q+1};c_1+\mu,c_2,\dots,c_q;x), \tag{7} $$

где ${}_{q+1}F_q$ - обобщенный гипергеометрический ряд [10, (2.1.2)]. Применение леммы 9 из [4] приводит к следующему утверждению: пусть либо $c_1+1\ge a_1\ge c_1>0$ и $a_2,\dots,a_{q+1},c_2,\dots,c_q$ - любые положительные числа, либо $a>c+1>1$ и выполнены неравенства:

$$ \frac{e_q(c_2,\dots,c_q,1)}{e_q(a_2,\dots,a_{q+1})} \le \frac{e_{q-1}(c_2,\dots,c_q,1)}{e_{q-1}(a_2,\dots,a_{q+1})} \le \dots \le \frac{e_1(c_2,\dots,c_q,1)}{e_1(a_2,\dots,a_{q+1})} \le 1. $$

Тогда $g(\mu;x)$ из (7) и построенная по ней по формуле (2) функция $\psi(\mu,\nu;x)$ удовлетворяют утверждениям теоремы 2, следствий 1,2,3 и неравенству (5). Здесь $e_k(x_1,\ldots,x_q)$ - k-ый элементарный симметрический многочлен, то есть

$$e_0(x_1,\ldots,x_q)=1,\quad e_k(x_1,\ldots,x_q)=\sum_{1\le j_1<j_2\cdots<j_k\le q} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k},\quad k\ge 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке the European Research Council Advanced grant № 267055 (S. Kalmykov had a postdoctoral position at the Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary), а также Министерством науки и образования РФ (проект 6.8653.2013 в рамках государственного задания).

Список литературы

[1] Karp D.B., Sitnik S.M. *Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **364**(2), 384–394 (2010).

[2] Д.Б. Карп, *Неравенства Турана для функции Куммера от сдвига по обоим параметрам*, Записки научных семинаров ПОМИ, **383**, 110–125(2010).

[3] Kalmykov S.I., Karp D.B. *Log-concavity for series in reciprocal gamma functions, Integral Transforms and Special Functions*, **24**:11, 2013, 859–872(2013).

[4] Kalmykov S.I., Karp D.B. *Log-convexity and lor g-concavity for series in gamma ratios and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **406**, 400–418 (2013).

[5] Gosper R.W. *Decision procedures for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **75**, 40–42 (1978).

[6] Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D. *A=B* (A K Peters/CRC Press, 1996).

[7] Niculescu C.P., Persson L.-E. *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, (Springer Science+Business Media, Inc, 2006).

[8] Miller K.S., Samko S. *Completely monotonic functions*, Integr. Transf. and Spec. Funct. **12**:4, 389–402 (2001).

[9] Schilling R.L., Song R., Vondraček Z. *Bernstein Functions. Theory and Applications* (Walter de Gruyter, Studies in Mathematics, **37**, 2010).

[10] Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special functions* (Cambridge University Press, 1999).

С.И. Калмыков,
Postdoc, The Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary,
e-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

S.I. Kalmykov,
Postdoc, The Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary,
e-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Д.Б. Карп,
Ведущий специалист, Дальневосточный федеральный университет, 690950, Владивосток, ул. Суханова. 8;
Старший научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7,
e-mail: dmkrp@yandex.ru

D.B. Karp,
Leading Officer, Far Eastern Federal University, 8 Sukhanova Street, Vladivostok, 690950, Russia
Senior research fellow, Institute of Applied Mathematics, FEBRAS, 7 Radio Street, Vladivostok, 690041, Russia
e-mail: dmkrp@yandex.ru